

Instabilités des Métamatériaux

Avantages et inconvénients des symétries

Christelle Combescure

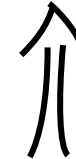
Approches Théoriques pour Métamatériaux

Définitions

Perte de stabilité du milieu étudié



Quezako ?



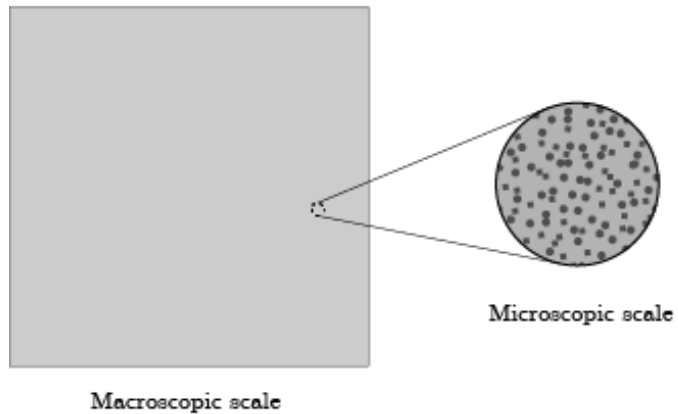
Instabilités des Métamatériaux **Avantages et inconvénients des symétries**



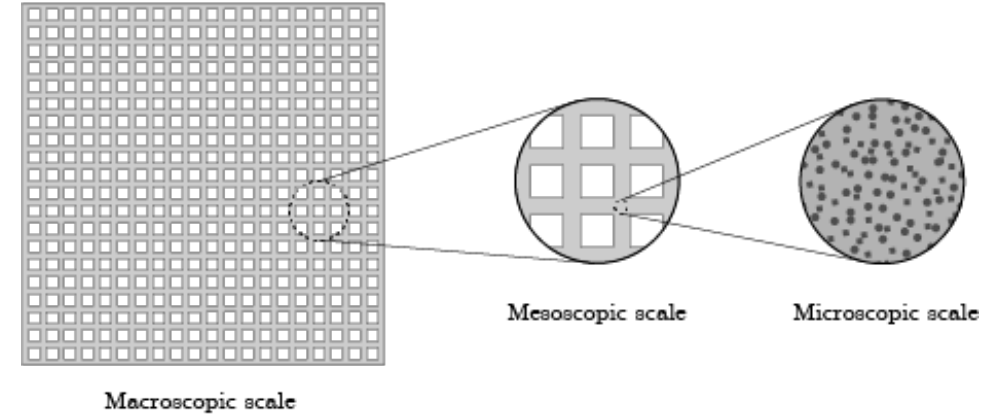
Opérations géométriques laissant
invariant le milieu étudié

Définitions : Métamatériaux

Scale separation in conventional materials



Scale separation in architected materials



Choix judicieux et réfléchi de l'agencement des matériaux

Propriétés liées à la géométrie des matériaux à l'échelle mésoscopique

Définitions : Métamatériaux

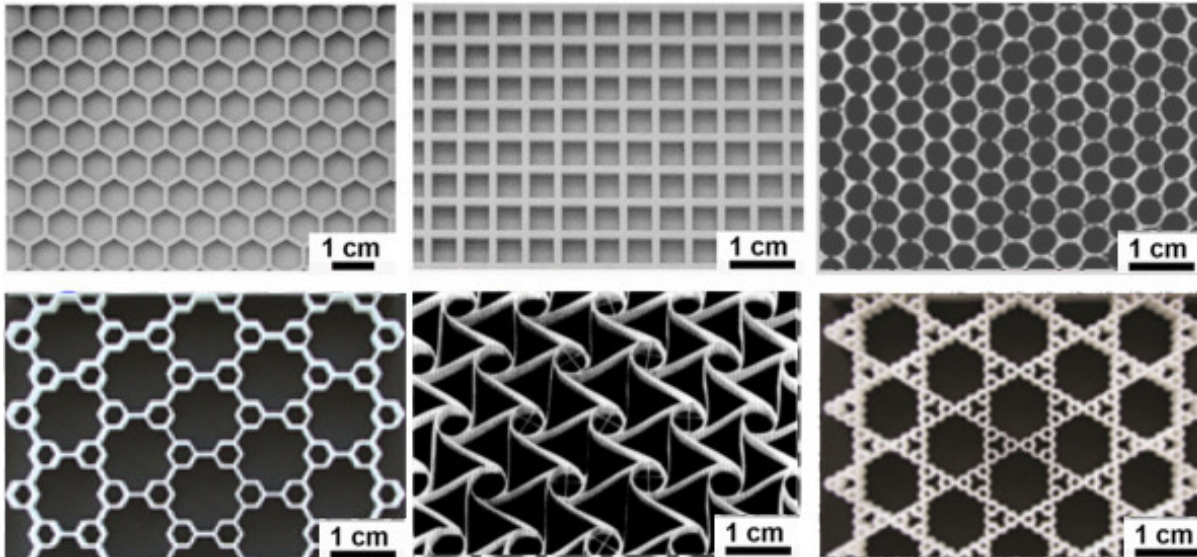
Classification

Nature	Régularité	Poreux
Naturel	Periodique	oui : Cellulaire
Manufacturé	Aperiodique	non : Composite

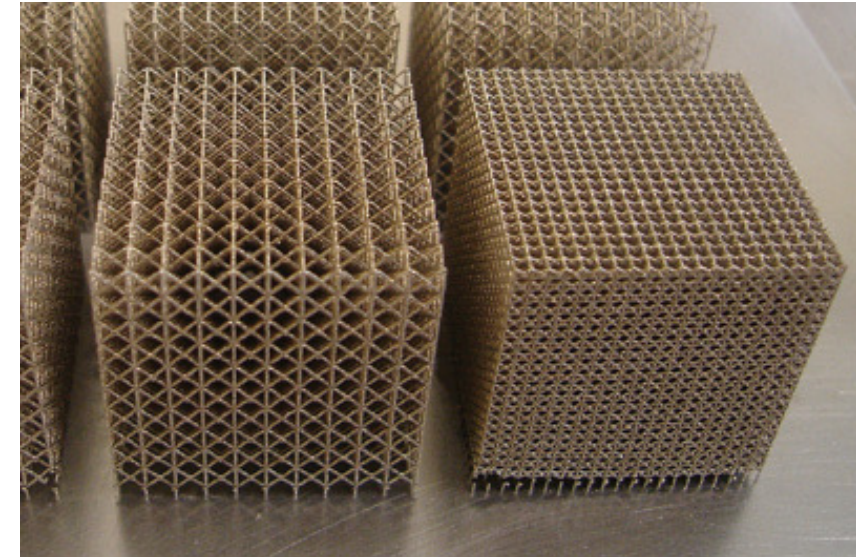
« lattice » materials, honeycombs, microtrusses

Définitions : Métamatériaux

Classification : Manufacturé, périodique, cellulaire



2D : nids d'abeilles



3D : lattices

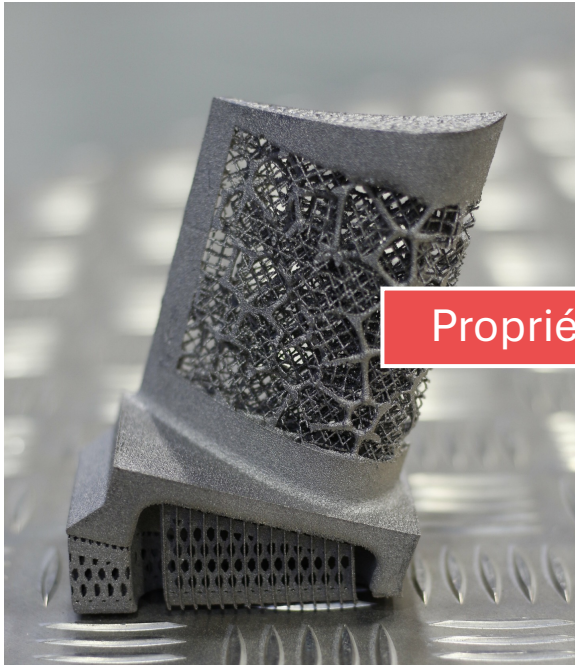
Définitions : Métamatériaux

Applications

1. Allègement de rigidité constante



Project MOMAP



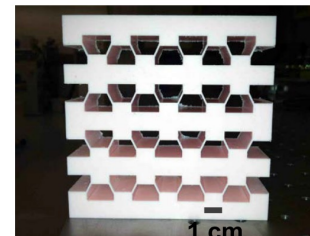
Propriétés macroscopiques élastiques équivalentes et leurs limites



Définitions : Métamatériaux

Applications

2. Amortissement : matériau ou instabilités



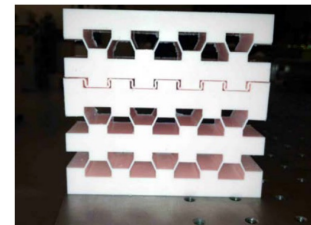
Grandes déformations / Comportement instable



state 3



state 4



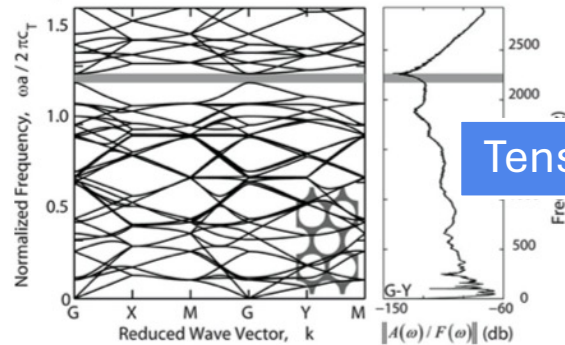
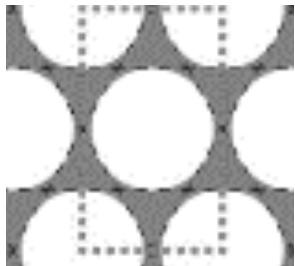
state 5.....



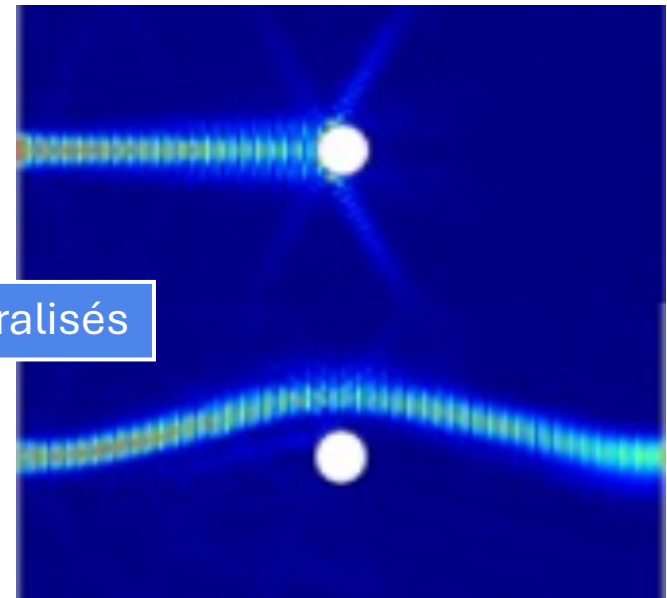
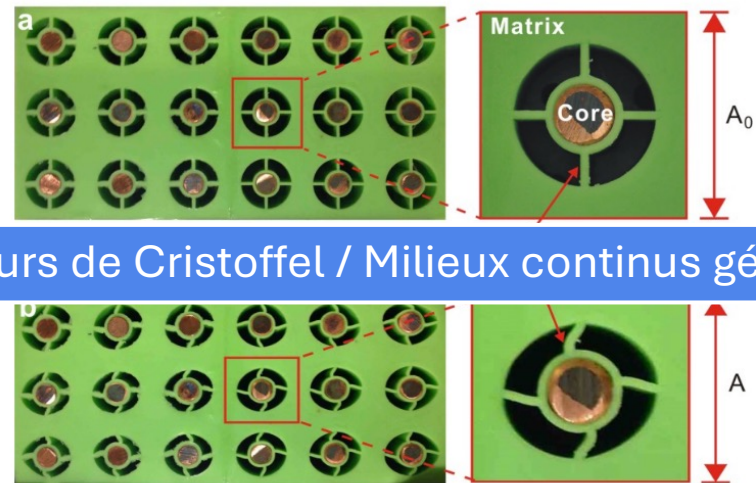
Définitions : Métamatériaux

Applications

3. Propagation des ondes



Tenseurs de Cristoffel / Milieux continus généralisés



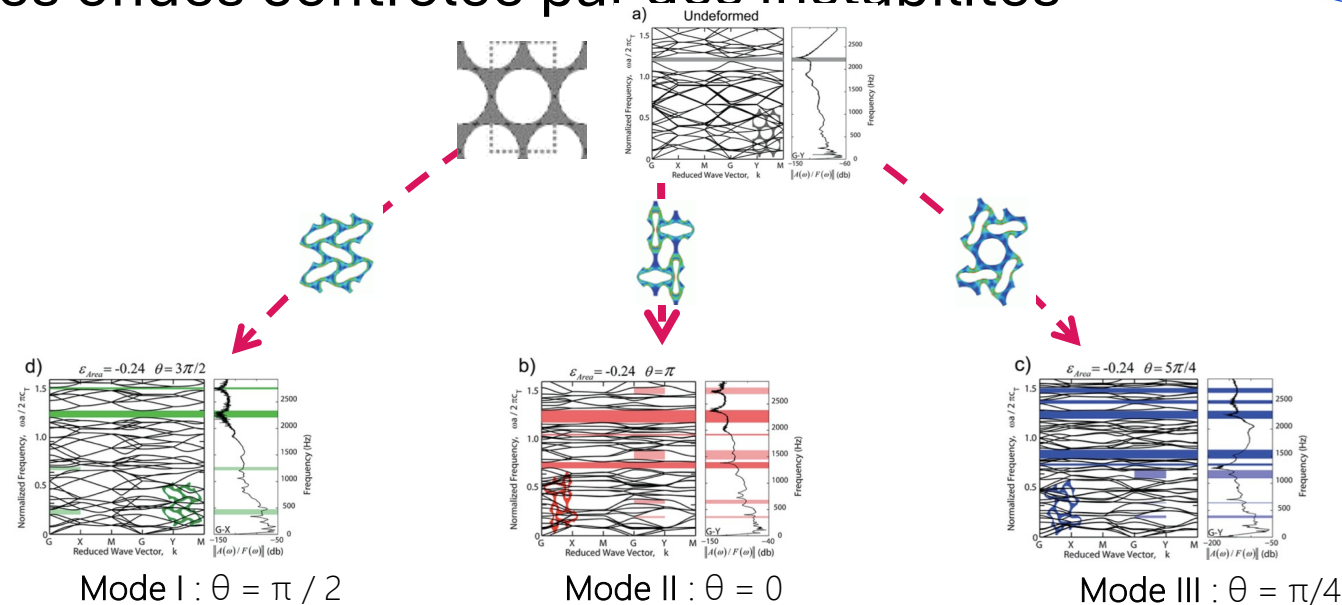
[Rosi 2019] *Continuum modelling of frequency dependent acoustic beam focusing and steering in hexagonal lattices*
 [Wang 2014] *Harnessing buckling to design tunable locally resonant acoustic metamaterials*
 [Shan 2014] *Harnessing Multiple Folding Mechanisms in Soft Periodic Structures for Tunable Control of Elastic Waves.*

Définitions : Métamatériaux

Applications



Propagation des ondes contrôlée par des instabilités



Modélisation des métamatériaux

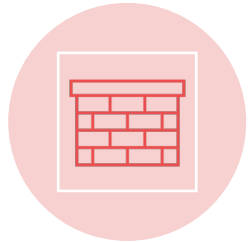
Propriétés macroscopiques élastiques équivalentes et leurs limites

Grandes déformations / Comportement instable

Tenseurs de Cristoffel / Milieux continus généralisés

Métamatériaux

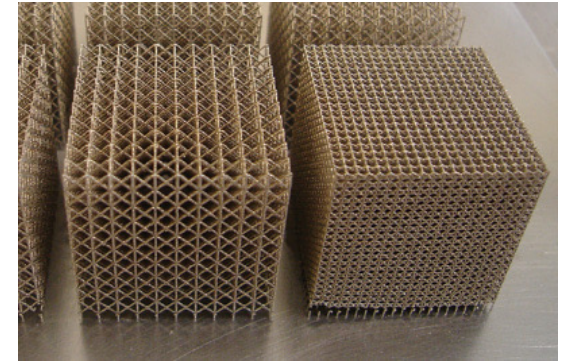
Spécificités



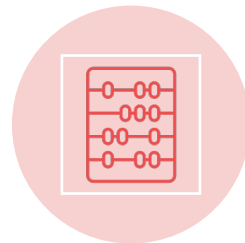
Applications avec un grand nombre de « cellules »



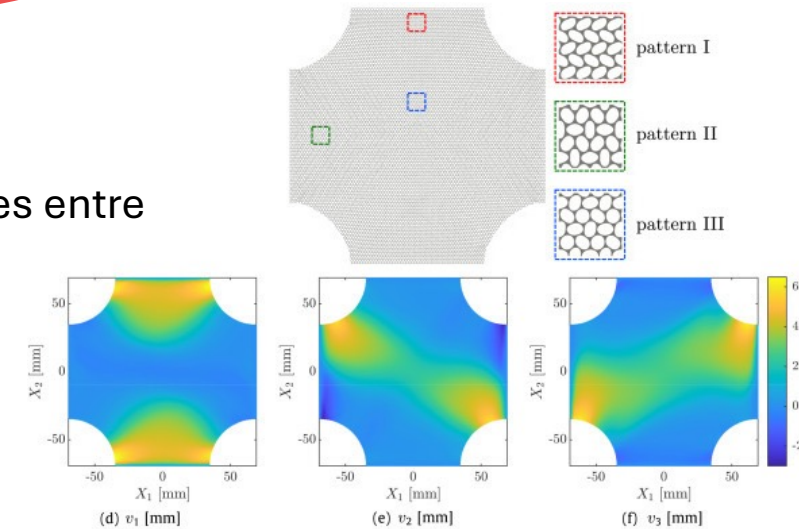
Comportement de compression complexe, y compris le flambage



Mésostructure régulière avec de nombreuses symétries



Interactions possibles entre les cellules

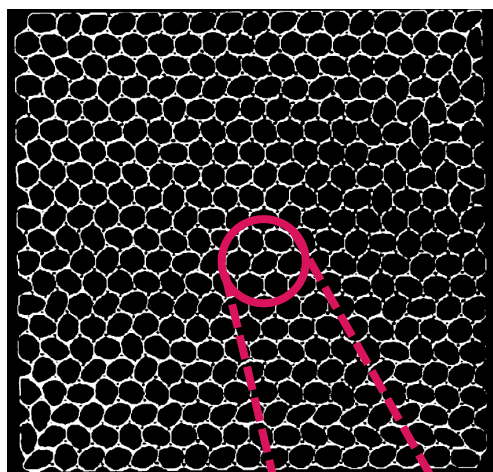


Métamatériaux

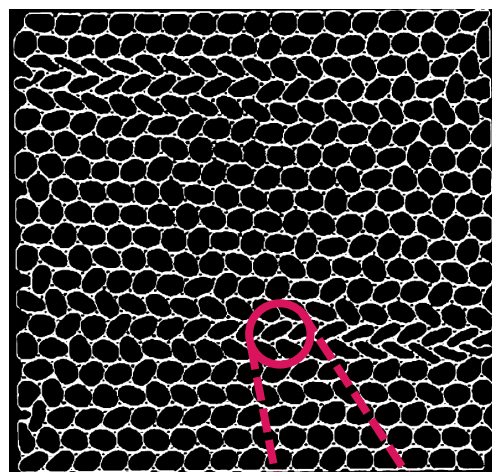
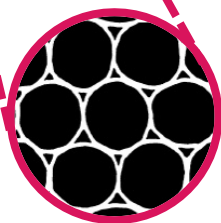
Contexte

Contexte

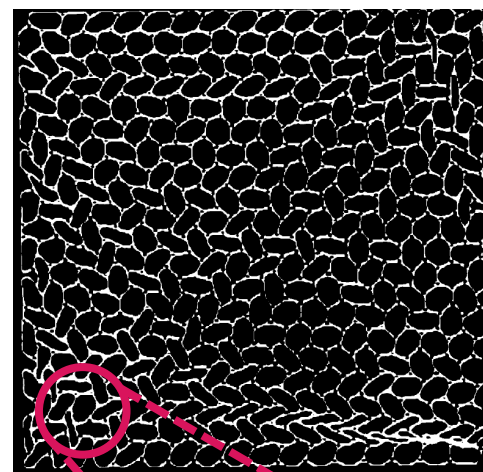
Expériences sur les nids d'abeilles en compression [Papka 1999]



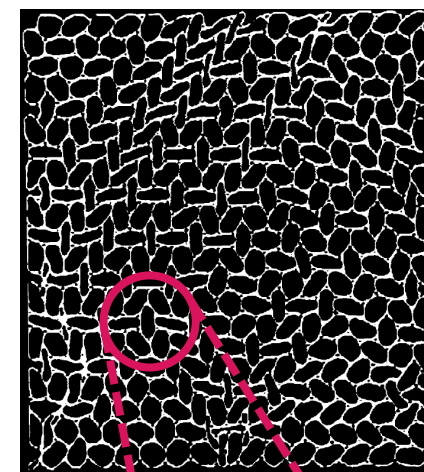
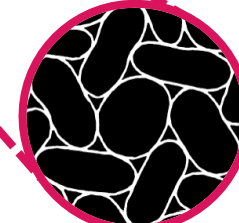
Spécimen non déformé



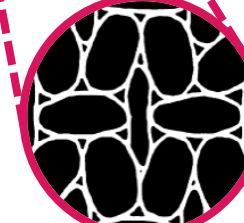
Rapport de biaxialité (y/x) = 0,51



Rapport de biaxialité (y/x) = 1

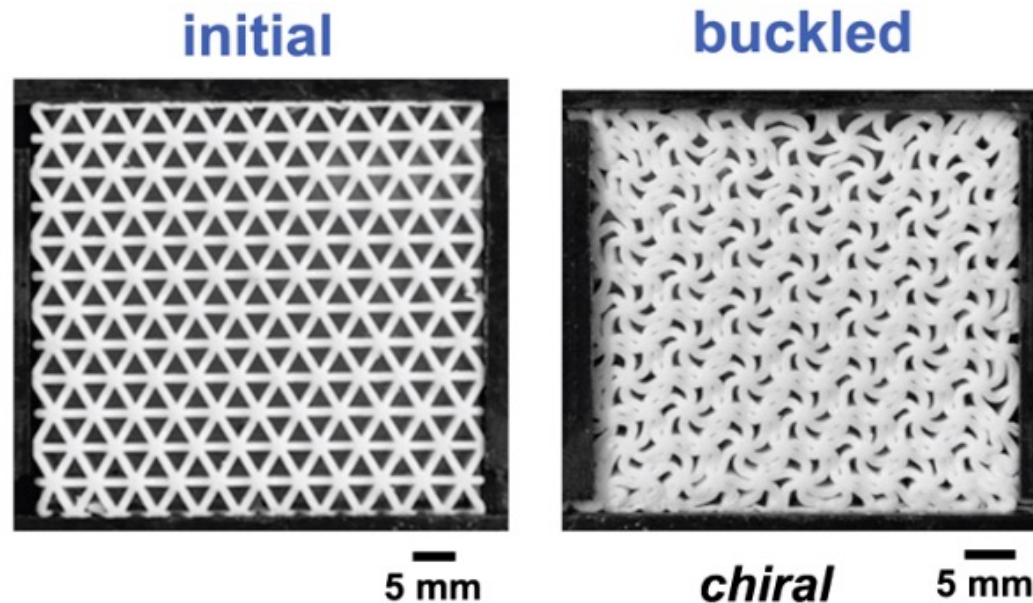
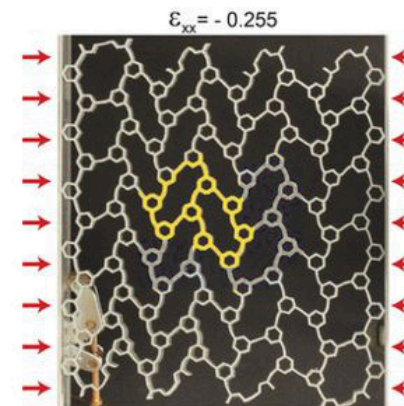
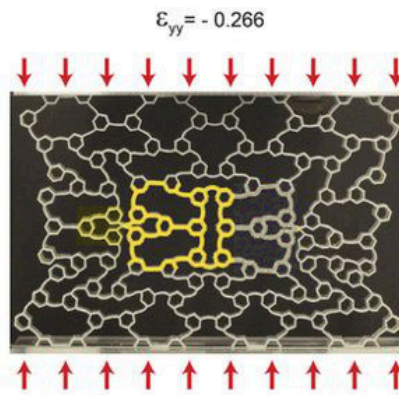
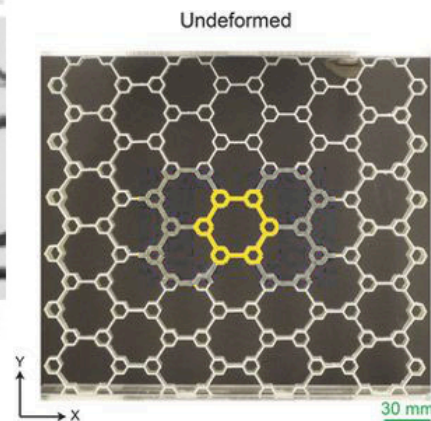
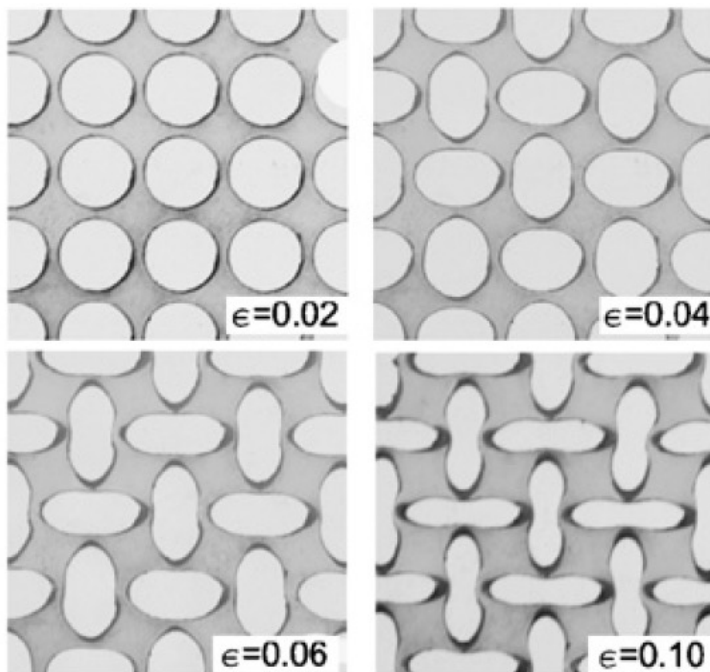


Rapport de biaxialité (y/x) = 3



Contexte

Régularisation et modifications géométriques



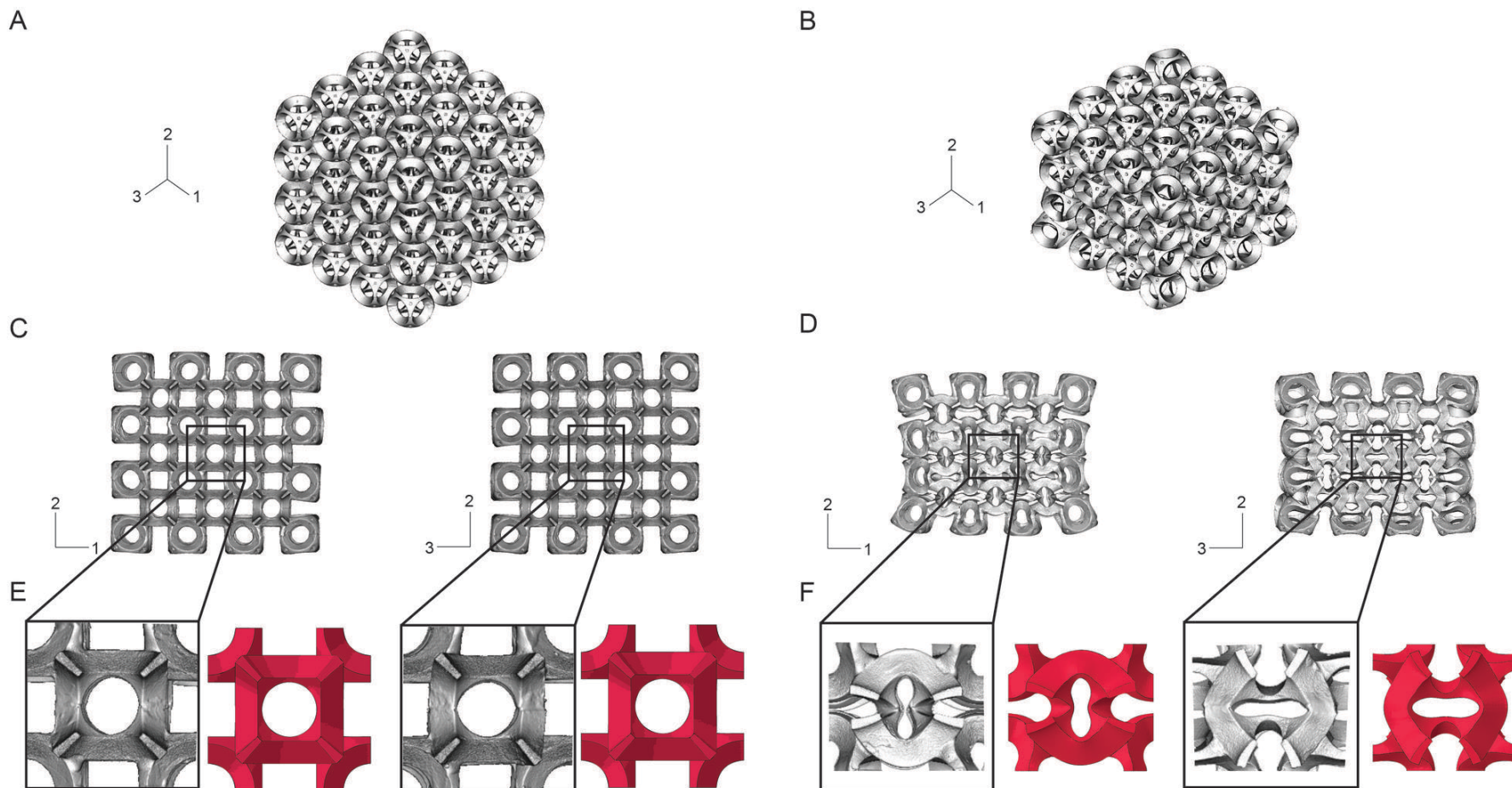
[Bertoldi 2008] *Mechanics of deformation-triggered pattern transformations and superelastic behavior in periodic elastomeric structures*

[Oftadeh 2014] *Mechanics of anisotropic hierarchical honeycombs*

[Kang 2014] *Complex ordered patterns in mechanical instability induced geometrically frustrated triangular cellular structures*

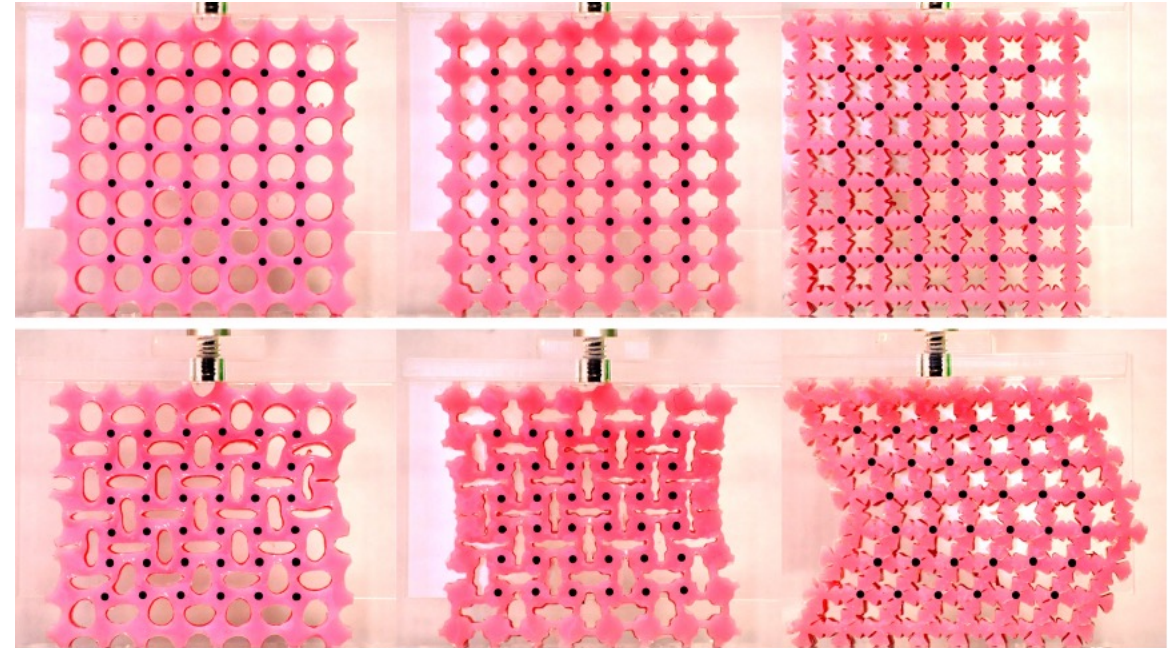
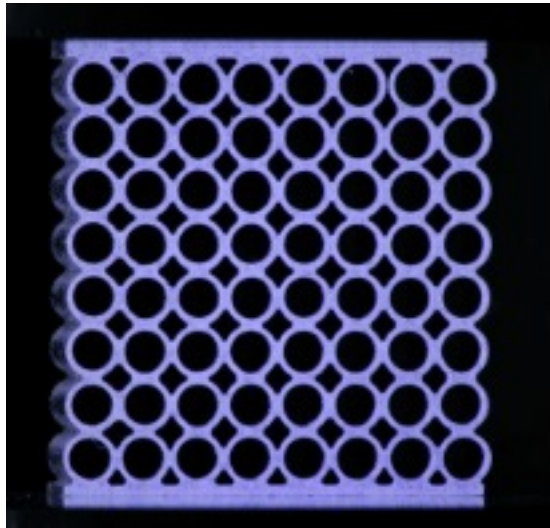
Contexte ^A

Structures 3D



Contexte

Localisation et flambage macroscopique



[Overvelde 2012] *Compaction through buckling in 2D periodic, soft and porous structures: Effect of pore shape*

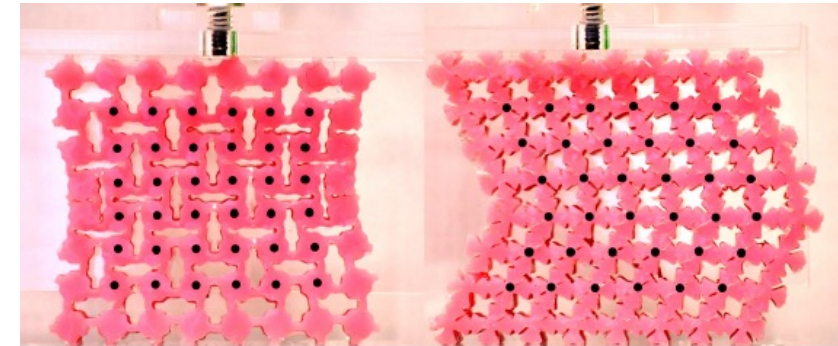
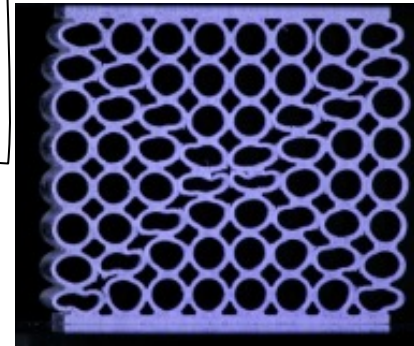
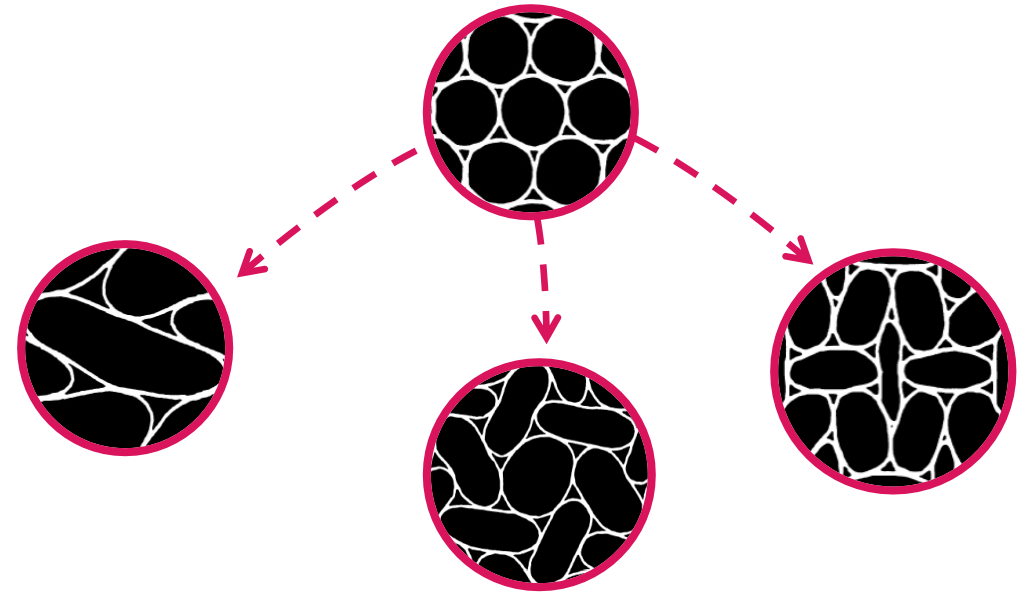
Contexte

Observations expérimentales

Flambage sur plusieurs cellules

3 comportements instables possibles

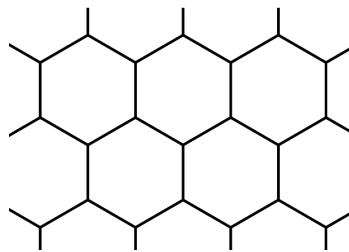
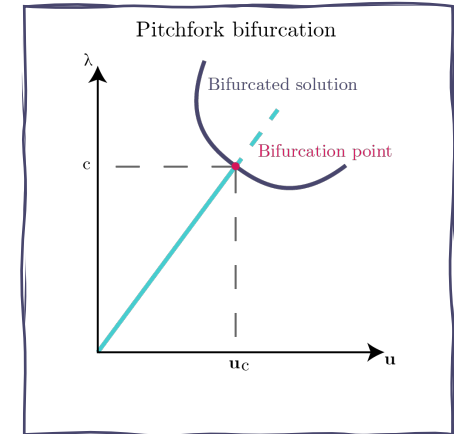
- Création de motif
 - Localisation
 - Flambage global
- } Flambage macroscopique



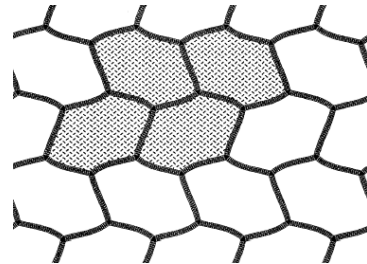
Contexte

Modélisation par des milieux périodiques infinis [Ohno 2002, Okumura 2002]

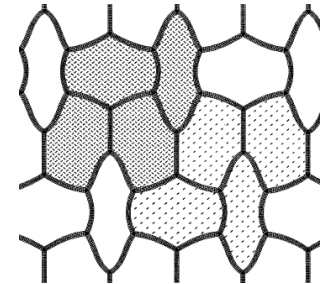
À l’échelle d’une ou plusieurs cellules périodiques



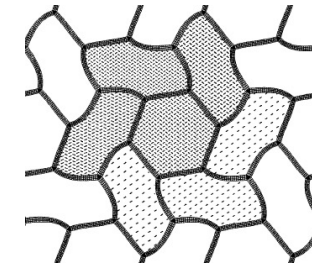
(a)



(b)

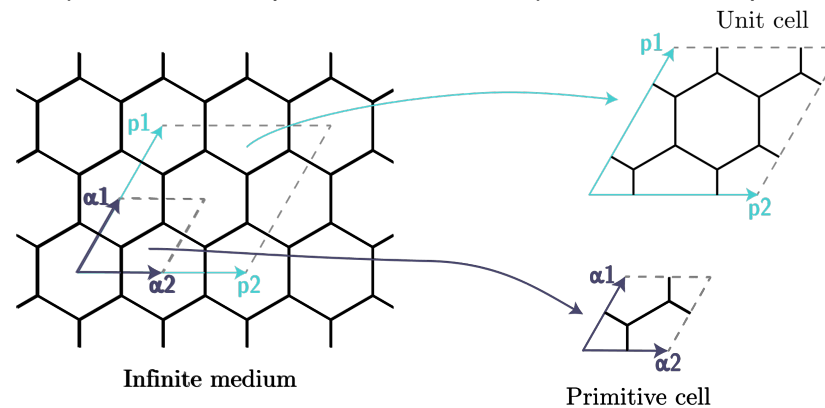


(c)



(d)

(a) Nid d’abeilles hexagonal non déformé, (b-d) Adapté de [Ohno 2002] Modes identifiés pour un nid d’abeilles hexagonal sous compression. b) Mode I - compression uniaxiale, c) Mode II - compression biaxiale, d) Mode III - compression équilibaxiale.

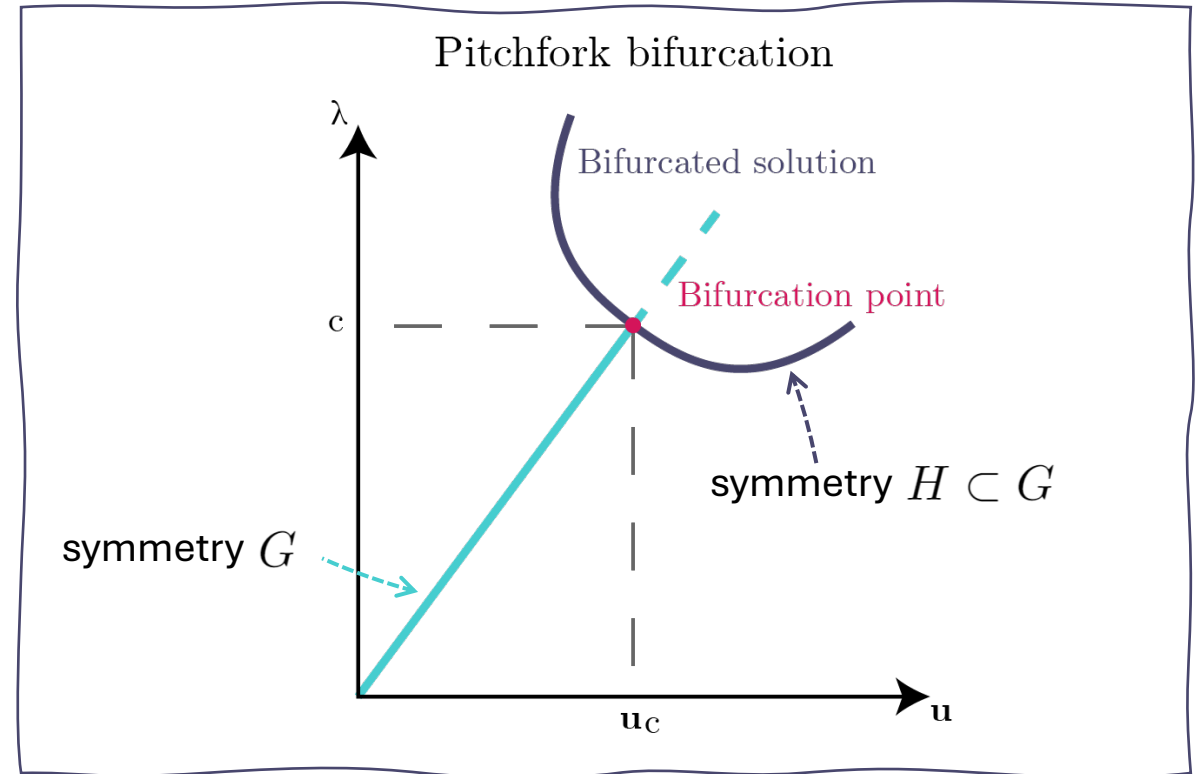
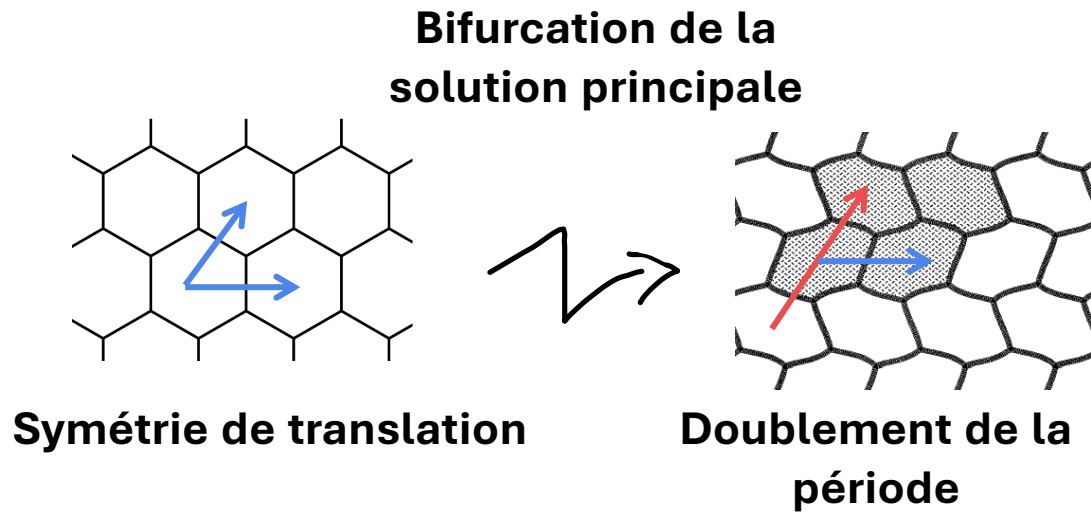


[Ohno 2002] *Microscopic symmetric bifurcation condition of cellular solids based on a homogenization theory of finite deformation.*

[Okumura 2002] *Post-buckling analysis of elastic honeycombs subject to in-plane biaxial compression*

Contexte

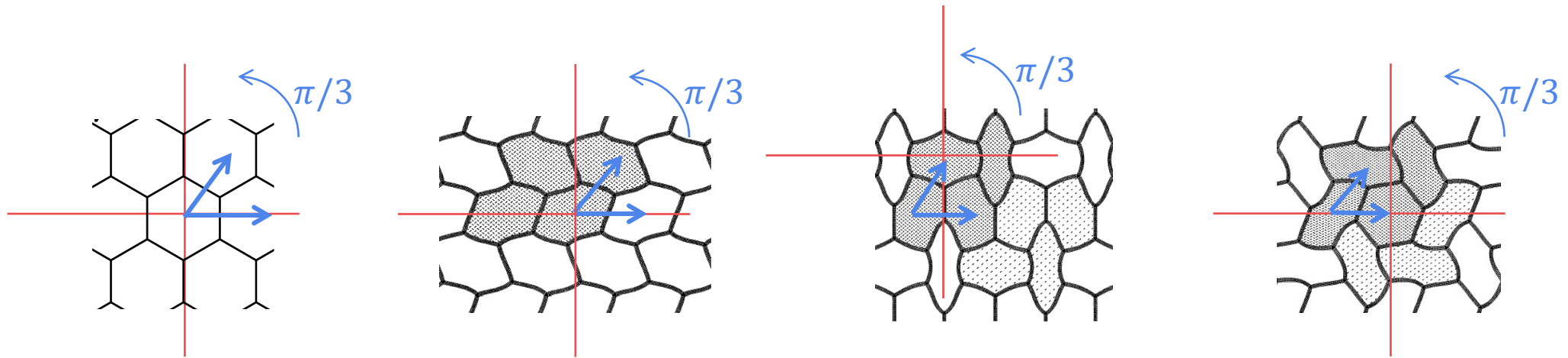
Théorie de la bifurcation [Golubitsky 1988]



La création de motifs et la modification de la taille des cellules élémentaires sont dues à un changement de symétrie au point de bifurcation

Contexte : à vous de jouer !

À la recherche des symétries perdues

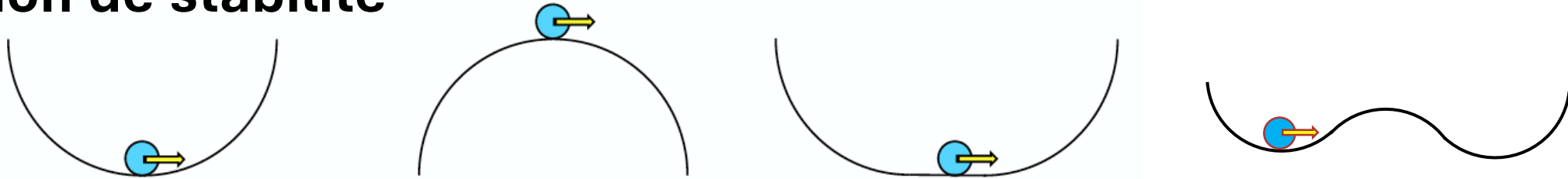


Bifurcations et symétries

Bases Théoriques

Théorie de la bifurcation

Notion de stabilité



Exercice :

1. Nommer chacun des 3 états décrits ci-dessus
2. Comment les qualifier un peu plus mathématiquement ?

Définition

Un équilibre ou un état stationnaire est dit
si

Théorie

Notion de stabilité

Définition

Un équilibre ou un état stationnaire est dit **stable** si une « petite » perturbation initiale produit une solution qui reste « proche » de cet équilibre pour tout temps.

Traduction mathématique :

Équation d’état :

$$\dot{p} = F(p, t)$$

Etat stationnaire :

$$p_e(t) = p_e, \quad \forall t \geq 0 \quad (\dot{p}_e = 0) \quad p_e \text{ ne dépend pas du temps}$$

Condition perturbée initiale :

$$p(t = 0) = p_0$$

Un système est stable si

$$\exists \eta > 0, \text{ tel que } \|p_0 - p_e\| \leq \eta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p_e$$

la perturbation est proche de l’état d’équilibre

La solution pour un temps infini revient à l’état d’équilibre

Théorie

Notion de stabilité

Un système est stable si

$$\exists \eta > 0, \text{ tel que } \|p_0 - p_e\| \leq \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p_e$$

Exercice application : faire tourner son portable autour de ses 3 axes... l’une des rotations est instable !!

Théorème de l’axe médian

Explication : Principe Fondamental de la Dynamique sur les moments

$$\mathbb{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbb{I} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}$$

\mathbb{I} Matrice d’inertie

$\boldsymbol{\omega}$ vitesse angulaire de rotation

\boldsymbol{M} moment appliqué au solide

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)}$$

Théorie

Notion de stabilité

Un système est stable si

$$\exists \eta > 0, \text{ tel que } \|p_0 - p_e\| \leq \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p_e$$

Théorème de l’axe médian

Soit la situation où le solide tourne autour de l’axe e_1

- L’équilibre est alors $\omega_1 \neq 0, \omega_2 = \omega_3 = 0$
- Pour savoir s’il est stable on va le perturber par une **petite** vitesse angulaire initiale $\delta\omega_2$ et $\delta\omega_3$ autour des axes e_2 et e_3
- On a alors : (1) $\Leftrightarrow \dot{\omega}_1 = \delta\omega_2 \delta\omega_3 \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} \ll 1$ donc $\dot{\omega}_1 \approx 0$
- (2) $\Leftrightarrow \ddot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 \omega_1 \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} = \omega_1^2 \delta\omega_2 \frac{(I_1 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_3 I_2} = A \delta\omega_2$
avec $A < 0$

L’accélération $\ddot{\omega}_2$ s’oppose à la perturbation ω_2 . Le système est donc stable

Faire de même pour montrer que $\ddot{\omega}_3$ s’oppose à la perturbation $\delta\omega_3$

$$I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 I_3 - \omega_2 \omega_3 I_2 = 0 \quad (1)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1 I_1 - \omega_3 \omega_1 I_3 = 0 \quad (2)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 I_2 - \omega_1 \omega_2 I_1 = 0 \quad (3)$$

On suppose qu’on a choisi les directions tq $I_1 < I_2 < I_3$

Théorie

Notion de stabilité

Un système est stable si

$$\exists \eta > 0, \text{ tel que } \|p_0 - p_e\| \leq \eta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p_e$$

Théorème de l’axe médian

Soit la situation où le solide tourne autour de l’axe e_2

- L’équilibre est alors $\omega_2 \neq 0, \omega_1 = \omega_3 = 0$
- Pour savoir s’il est stable on va le perturber par une **petite** vitesse angulaire initiale $\delta\omega_1$ et $\delta\omega_3$ autour des axes e_1 et e_3

$$I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 I_3 - \omega_2 \omega_3 I_2 = 0 \quad (1)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1 I_1 - \omega_3 \omega_1 I_3 = 0 \quad (2)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 I_2 - \omega_1 \omega_2 I_1 = 0 \quad (3)$$

On suppose qu’on a choisi les directions tq $I_1 < I_2 < I_3$

$$I_1 < I_2 < I_3$$

Théorie

Notion de stabilité

Un système est stable si

$$\exists \eta > 0, \text{ tel que } \|p_0 - p_e\| \leq \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p_e$$

Théorème de l’axe médian : réécriture

$$\dot{\omega}_1 = \frac{\omega_2 \omega_3 I_2 - \omega_2 \omega_3 I_3}{I_1} \quad (1)$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{\omega_3 \omega_1 I_3 - \omega_3 \omega_1 I_1}{I_2} \quad (2) \Leftrightarrow \dot{\omega} = F(\omega)$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{\omega_1 \omega_2 I_1 - \omega_1 \omega_2 I_2}{I_3} \quad (3)$$

Linéarisation autour de l’équilibre : $\dot{\omega} = F(\omega_e) + \frac{\partial F}{\partial \omega} \Big|_{\omega_e} (\omega - \omega_e)$

0 équilibre

$\delta\omega$

J

Théorème de Lyapunov

$$\delta \dot{\omega} = J \delta \omega \Rightarrow \delta \omega(t) = \delta \omega(0) e^{tJ}$$

$\delta \omega(t)$ est bornée $\forall t > 0$ ssi $\Re(j_i) \leq 0 \forall j_i$ valeurs propres de J

$$I_1 < I_2 < I_3$$

Théorie

Notion de stabilité

Un système est stable si

$$\exists \eta > 0, \text{ tel que } \|p_0 - p_e\| \leq \eta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p_e$$

Théorème de l'axe médian : réécriture

$$\dot{\omega}_1 = \frac{\omega_2 \omega_3 I_2 - \omega_2 \omega_3 I_3}{I_1} \quad (1)$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{\omega_3 \omega_1 I_3 - \omega_3 \omega_1 I_1}{I_2} \quad (2) \iff \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\omega})$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{\omega_1 \omega_2 I_1 - \omega_1 \omega_2 I_2}{I_3} \quad (3)$$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3(I_2 - I_3)/I_1 & \omega_2(I_2 - I_3)/I_1 \\ \omega_3(I_3 - I_1)/I_2 & 0 & \omega_1(I_3 - I_1)/I_2 \\ \omega_2(I_1 - I_2)/I_3 & \omega_1(I_1 - I_2)/I_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Si l'état d'équilibre étudié est tel que $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, 0, 0)$ alors $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1(I_3 - I_1)/I_2 \\ 0 & \omega_1(I_1 - I_2)/I_3 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda(\lambda^2 - \omega_1^2(I_3 - I_1)(I_1 - I_2)/I_3 I_2)$$

$$\lambda = \begin{cases} 0 \\ i\omega_1 \sqrt{(I_3 - I_1)(I_2 - I_1)/I_3 I_2} \\ -i\omega_1 \sqrt{(I_3 - I_1)(I_2 - I_1)/I_3 I_2} \end{cases}$$

$\Re(\lambda) \leq 0 \forall \lambda$ donc
le système est
stable

$$I_1 < I_2 < I_3$$

Théorie

Notion de stabilité

Un système est stable si

$$\exists \eta > 0, \text{ tel que } \|p_0 - p_e\| \leq \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p_e$$

Théorème de l'axe médian : réécriture

$$\dot{\omega}_1 = \frac{\omega_2 \omega_3 I_2 - \omega_2 \omega_3 I_3}{I_1} \quad (1)$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{\omega_3 \omega_1 I_3 - \omega_3 \omega_1 I_1}{I_2} \quad (2) \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\omega})$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{\omega_1 \omega_2 I_1 - \omega_1 \omega_2 I_2}{I_3} \quad (3)$$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3(I_2 - I_3)/I_1 & \omega_2(I_2 - I_3)/I_1 \\ \omega_3(I_3 - I_1)/I_2 & 0 & \omega_1(I_3 - I_1)/I_2 \\ \omega_2(I_1 - I_2)/I_3 & \omega_1(I_1 - I_2)/I_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Si l'état d'équilibre étudié est tel que $\boldsymbol{\omega} = (0, \omega_2, 0)$ alors $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_2(I_2 - I_3)/I_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \omega_2(I_1 - I_2)/I_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda(\lambda^2 - \omega_2^2(I_2 - I_3)(I_1 - I_2)/I_1 I_3)$$

$$\lambda = \begin{cases} 0 \\ \omega_2 \sqrt{(I_2 - I_3)(I_1 - I_2)/I_1 I_3} \\ -\omega_2 \sqrt{(I_2 - I_3)(I_1 - I_2)/I_1 I_3} \end{cases}$$

$\Re(\lambda_2) > 0$ donc le système est instable

Théorie

Deux méthodes :

1. Linéarisation-perturbation

Théorème de Lyapunov

$$\delta \dot{\omega} = J \delta \omega \Rightarrow \delta \omega(t) = \delta \omega(0) e^{tJ}$$

$\delta \omega(t)$ est bornée $\forall t > 0$ ssi $\Re(j_i) \leq 0 \forall j_i$ valeurs propres de J

2. Méthode directe de Lyapunov

Dans les systèmes conservatifs, les équations d’équilibre dérivent d’une énergie $\mathcal{E}(p, f)$

Equations d’équilibre : $F(p, f) \equiv -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p} = 0$ définit implicitement $p(f)$

Systemes
conservatifs

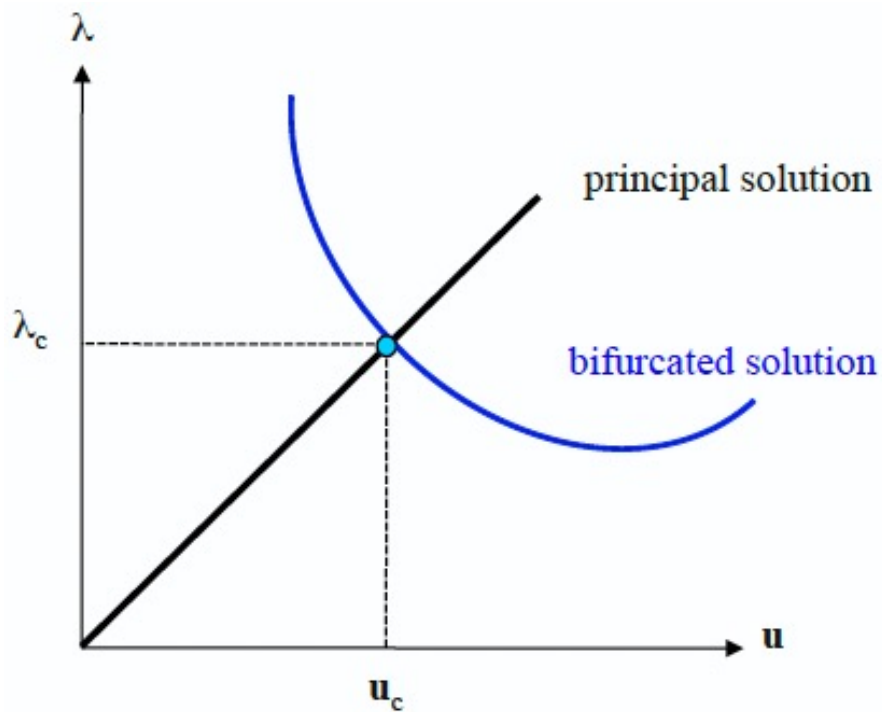
Théorème de Lejeune-Dirichlet

Stabilité si l’énergie locale est minimale

\Leftrightarrow toutes les valeurs propres de $\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial p^2}$ sont positives

Théorie

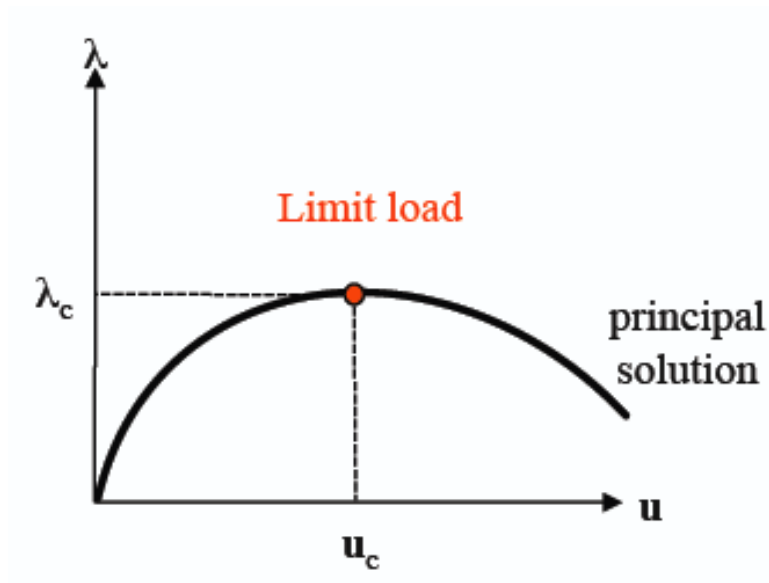
Bifurcation \neq Instabilité



Un bifurcation est une perte d'unicité de la solution



Il est possible de perdre la stabilité sans perdre l'unicité !



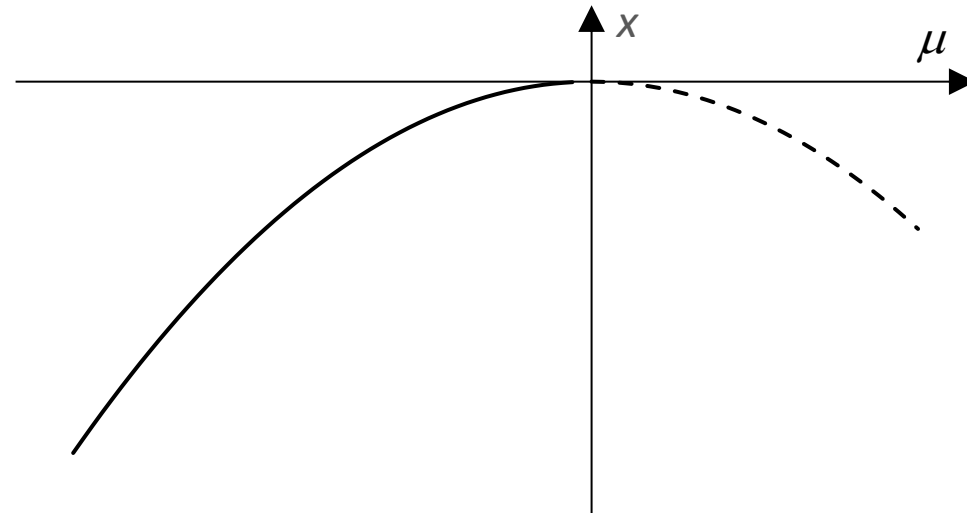
Théorie

Bifurcation \neq Instabilité

Instabilité: $\dot{x} = \sqrt{x} - \mu$

paramètre μ
variable x

Diagramme de « bifurcation »



Théorie

Bifurcation \neq Instabilité

$$F(x, \mu) = \sqrt{x} - \mu$$

État d’équilibre de référence : $F(x, \mu) = 0 = \sqrt{x} - \mu \Leftrightarrow x = \mu^2$

Stabilité : $\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=\mu^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\mu}$

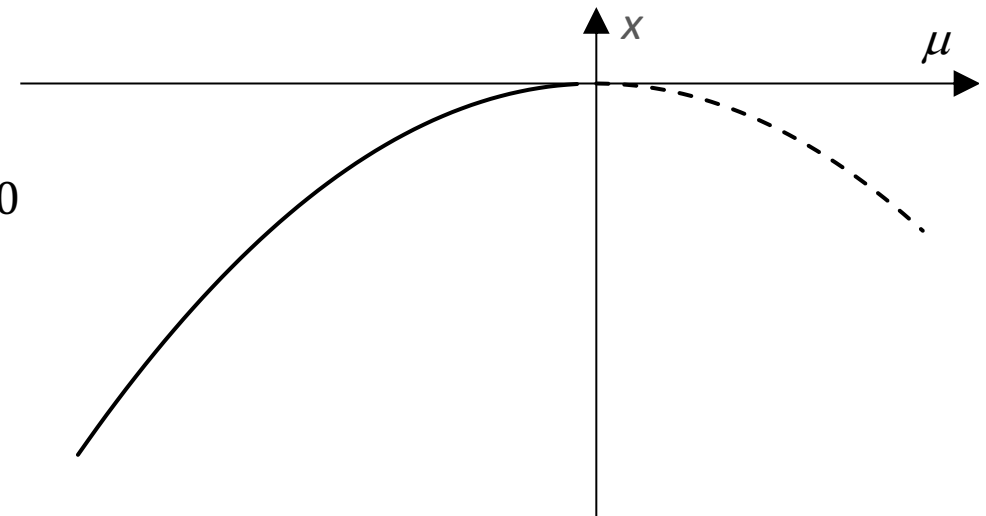
stable si $\mu < 0$ instable si $\mu \geq 0$

En $\mu = 0$: point critique

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} \Big|_{x=\mu^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{x=\mu^2} = \frac{-1}{4x^{3/2}} = \frac{-1}{4\mu^3}$$

instabilité: $\dot{x} = \sqrt{x} - \mu$

paramètre μ
variable x



 Point limite

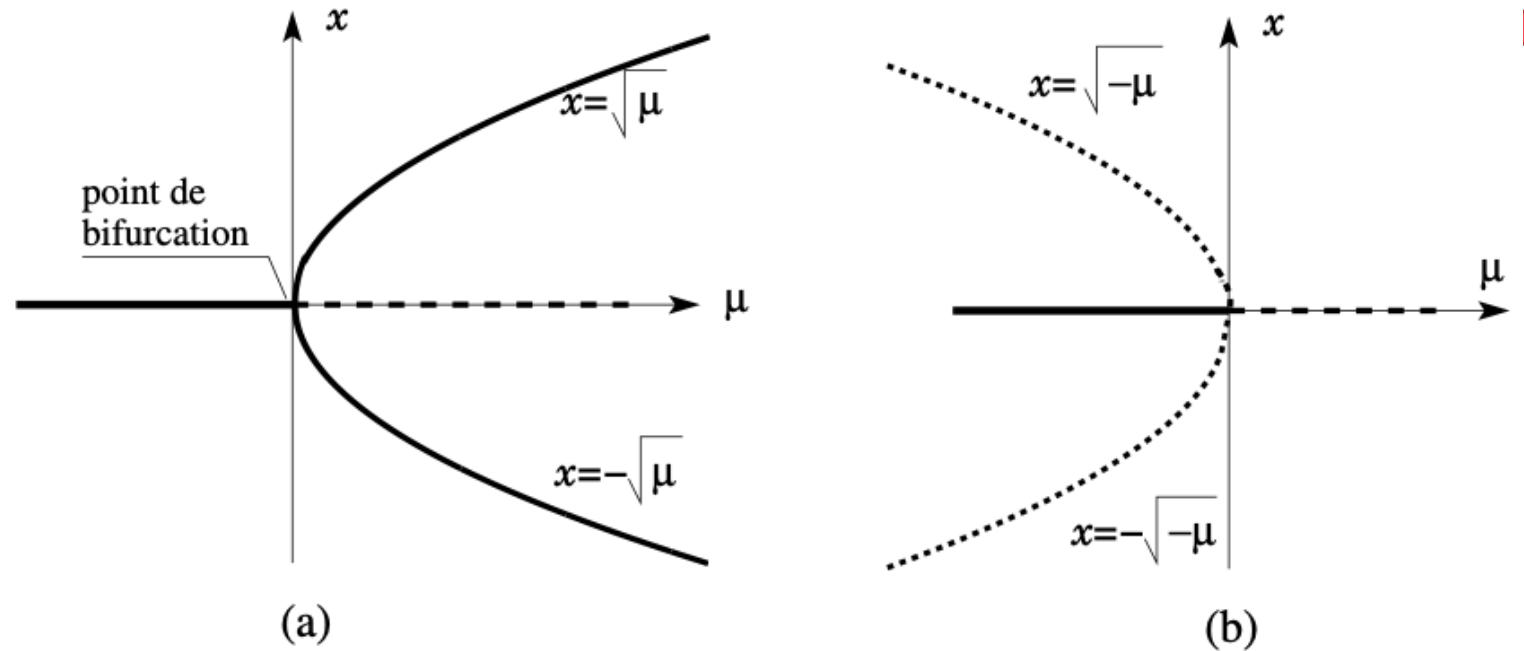
Théorie

Bifurcation \neq Instabilité

Bifurcation fourche : $\dot{x} = \mu x \pm x^3$

paramètre μ
variable x

Diagramme de bifurcation



Instabilités des Métamatériaux – **FIGURE:** Bifurcation fourche, (a): supercritique, (b): sous-critique

Théorie

Bifurcation fourche : $\dot{x} = \mu x - x^3$

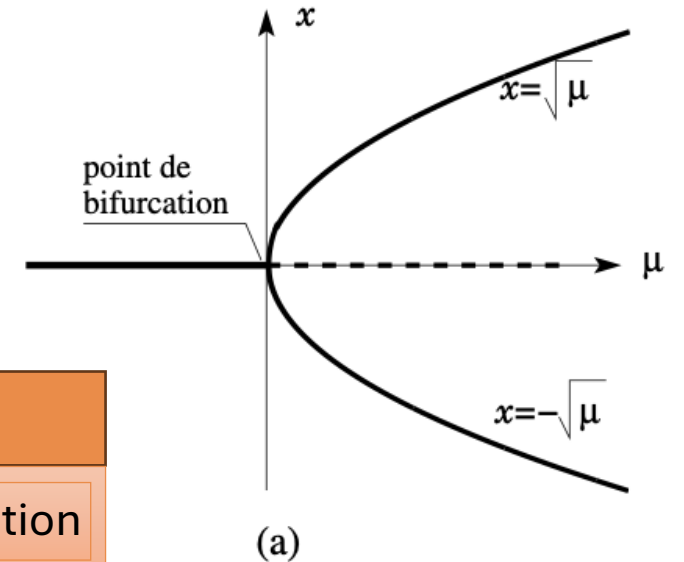
Bifurcation \neq Instabilité

$$F(x, \mu) = \mu x - x^3$$

État d’équilibre de référence : $F(x, \mu) = 0 = \mu x - x^3 \Leftrightarrow x = 0$


Stabilité : $\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=0} = \mu - 3x^2 \overset{0}{\rightarrow} \mu$ stable si $\mu < 0$ instable si $\mu \geq 0$

En $\mu = 0$: point critique



On constate qu’il existe une autre solution : $x = \pm\sqrt{\mu}$ valide uniquement pour $\mu > 0$

$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=\pm\sqrt{\mu}} = -2\mu$ stable car $\mu > 0$

 bifurcation

$\frac{\partial F}{\partial \mu} \Big|_{x=0} = x \overset{0}{\rightarrow} 0$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = -6x \overset{0}{\rightarrow} 0$ et $\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \Big|_{x=0} = -6 < 0$

Théorie

Bifurcation fourche : $\dot{x} = \mu x + x^3$

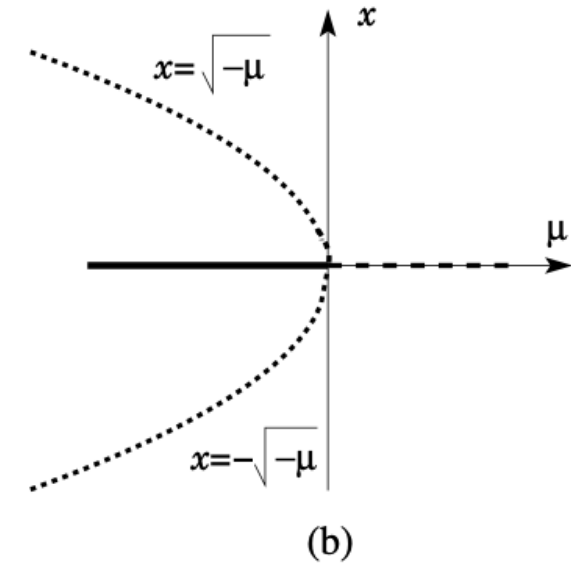
Bifurcation \neq Instabilité

$$F(x, \mu) = \mu x + x^3$$

État d’équilibre de référence : $F(x, \mu) = 0 = \mu x + x^3 \Leftrightarrow x = 0$

Stabilité : $\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=0} = \mu + 3x^2 \overset{0}{\rightarrow}$ stable si $\mu < 0$ instable si $\mu \geq 0$


En $\mu = 0$: point critique



On constate qu’il existe une autre solution : $x = \pm\sqrt{-\mu}$ valide uniquement pour $\mu < 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=\pm\sqrt{-\mu}} = 2\mu$$

stable car $\mu < 0$

 bifurcation

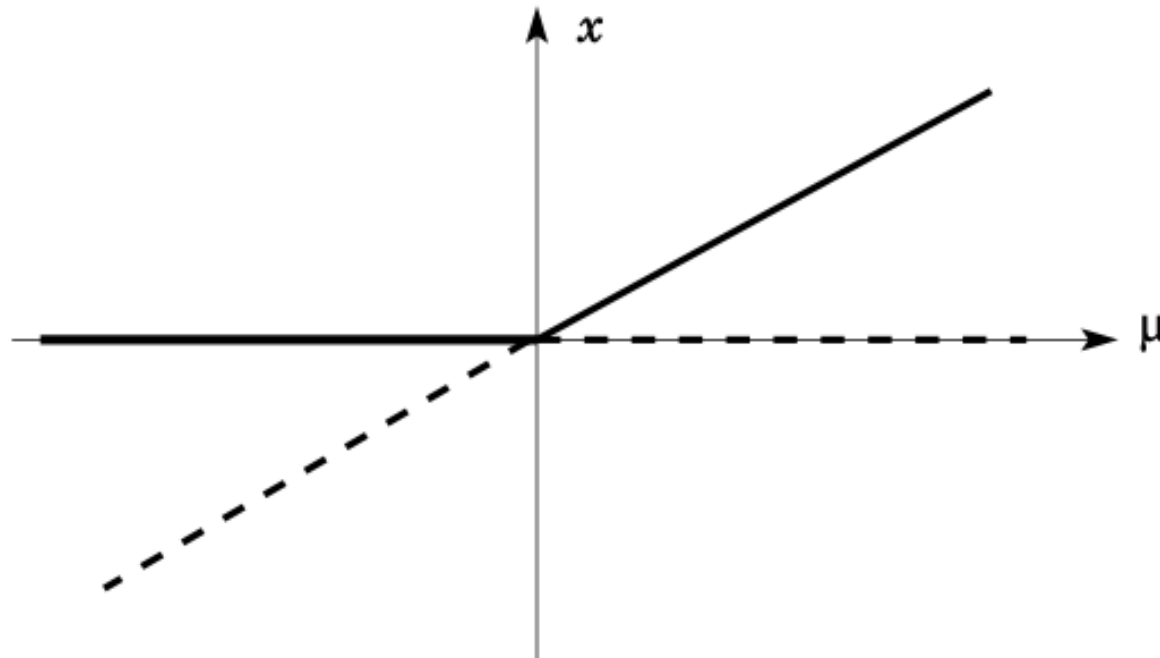
$$\frac{\partial F}{\partial \mu} \Big|_{x=0} = x \overset{0}{\rightarrow} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 6x \overset{0}{\rightarrow} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \Big|_{x=0} = 6 > 0$$

Théorie

Bifurcation transcritique : $\dot{x} = \mu x - x^2$

paramètre
variable

Bifurcation \neq Instabilité Diagramme de bifurcation



Théorie

Bifurcation \neq Instabilité

$$F(x, \mu) = \mu x - x^2$$

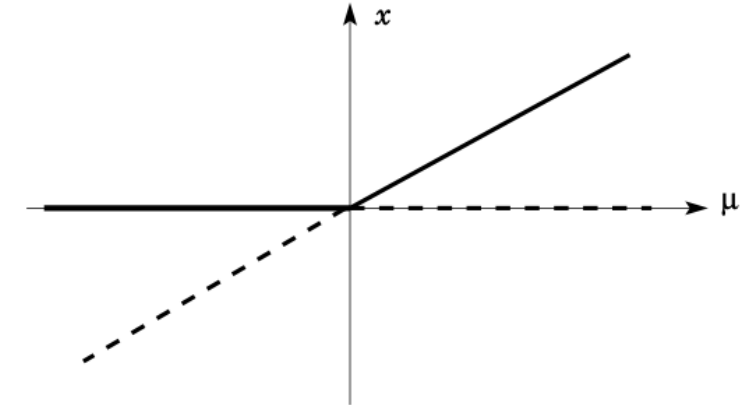
État d’équilibre de référence : $F(x, \mu) = 0 = \mu x - x^2 \Leftrightarrow x = 0$

Stabilité : $\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=0} = \mu - 2x$ stable si $\mu < 0$ instable si $\mu \geq 0$

En $\mu = 0$: point critique


Bifurcation transcritique : $\dot{x} = \mu x - x^2$

↖ paramètre
↗ variable



On constate qu’il existe une autre solution : $x = \mu$

$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=\mu} = -\mu$ stable si $\mu > 0$ instable si $\mu \leq 0$

 bifurcation

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \mu} \right|_{x=0} = x = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{x=0} = -2$$

Théorie

Equilibre : $F(x, \mu) = 0$

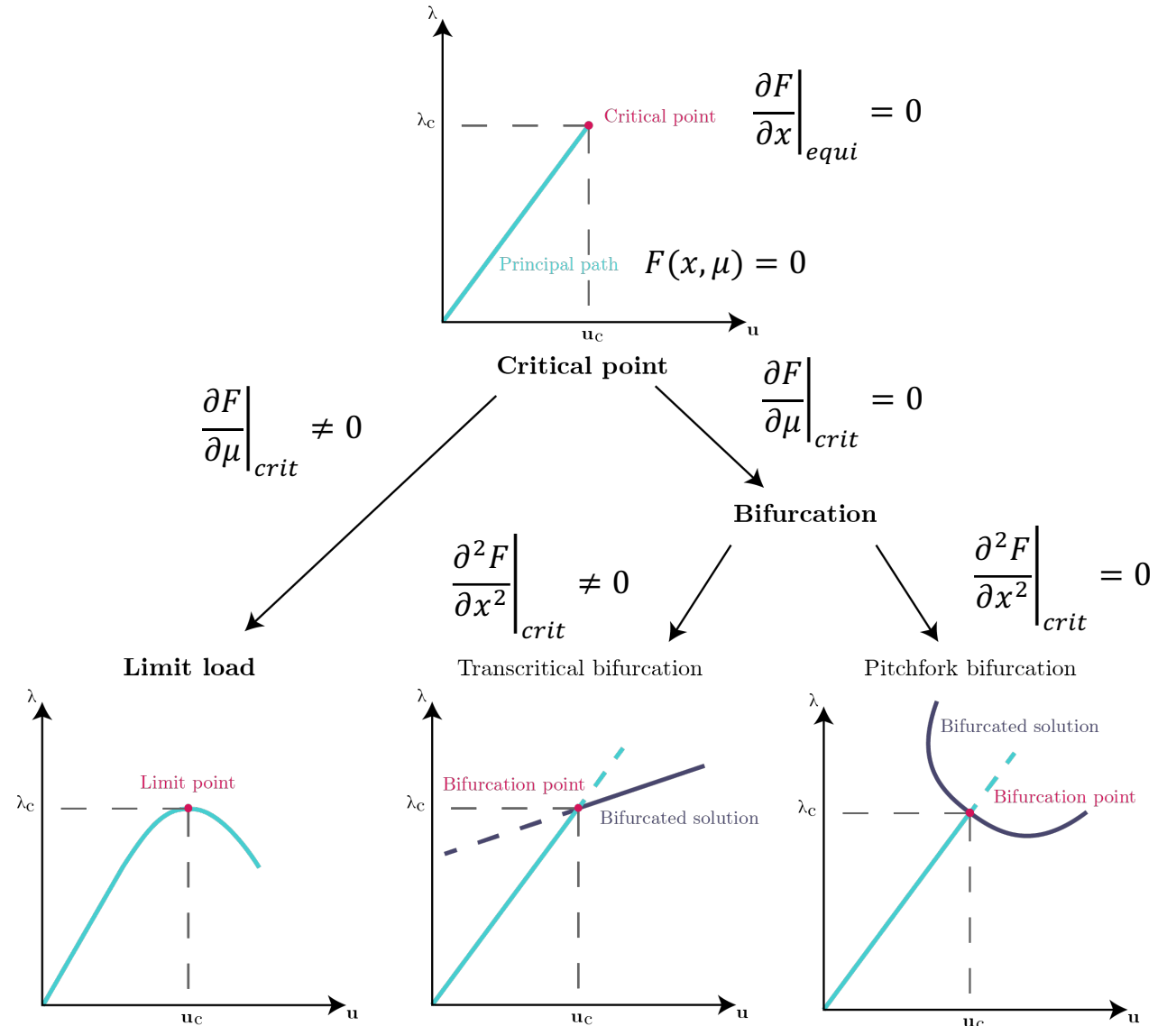
○ Point critique : $\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{equi} = 0$

• Point limite : $\frac{\partial F}{\partial \mu} \Big|_{crit} \neq 0$

• Point bifurcation : $\frac{\partial F}{\partial \mu} \Big|_{crit} = 0$

➤ Transcritique $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{crit} \neq 0$

➤ Fourche $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{crit} = 0$



Théorie

Systemes conservatifs

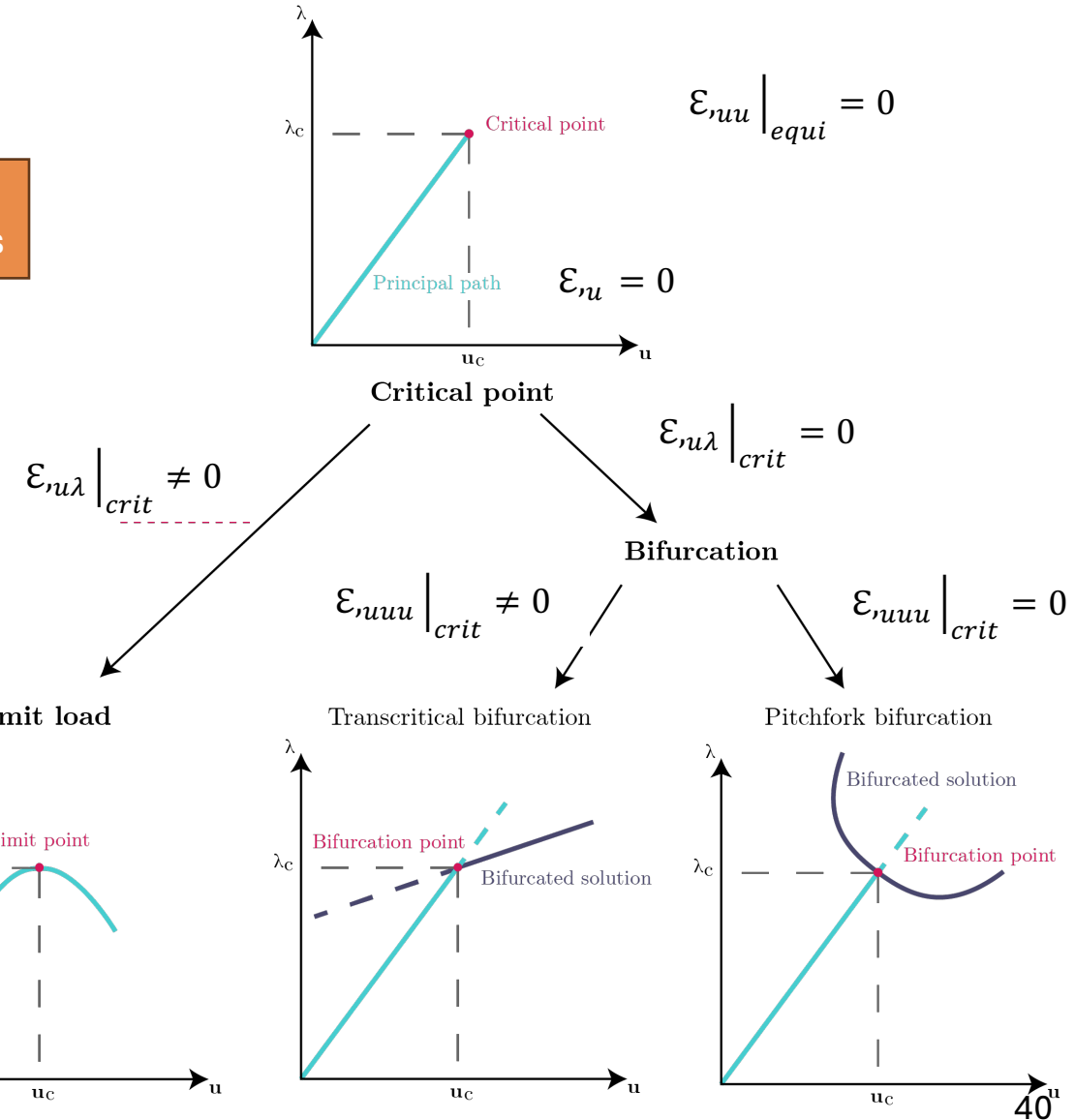
Théorème de Lejeune-Dirichlet

Stabilité si l’énergie locale est minimale
 \Leftrightarrow toutes les valeurs propres de $\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial p^2}$ sont positives

Equilibre : $F(u, \lambda) = -\mathcal{E}_{,u} = 0$

Stabilité de l’équilibre : $\mathcal{E}_{,uu}$ définie positive

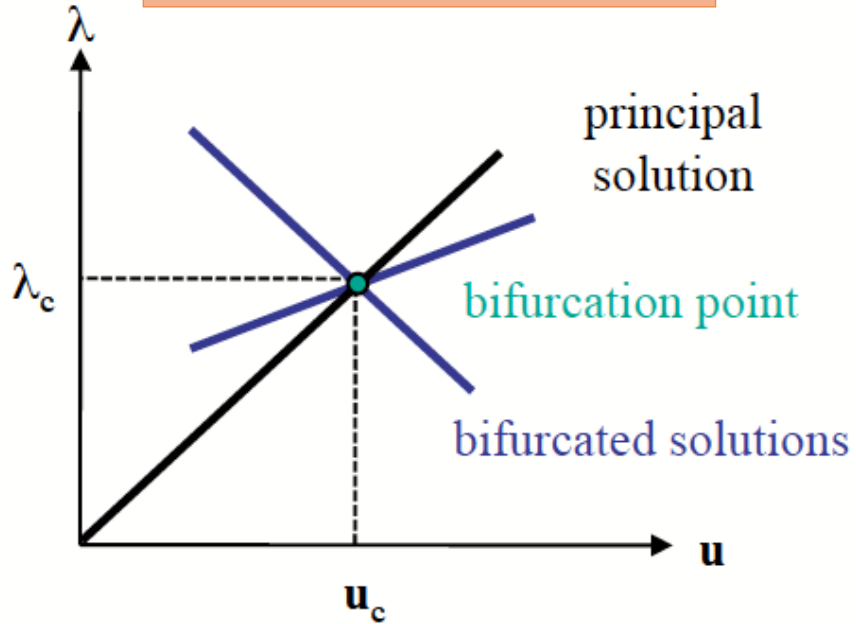
Point critique : $\mathcal{E}_{,uu} = 0$



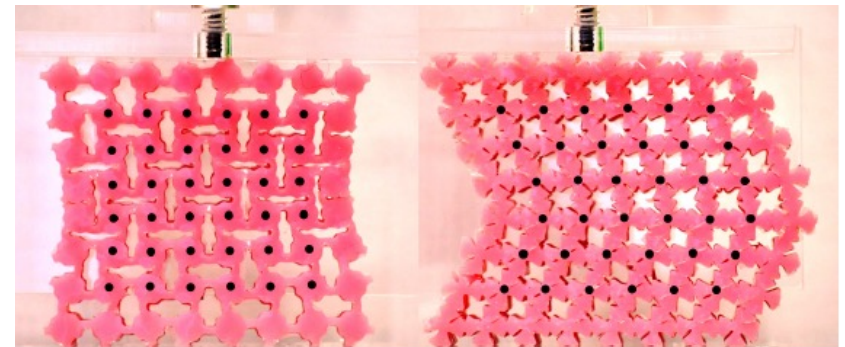
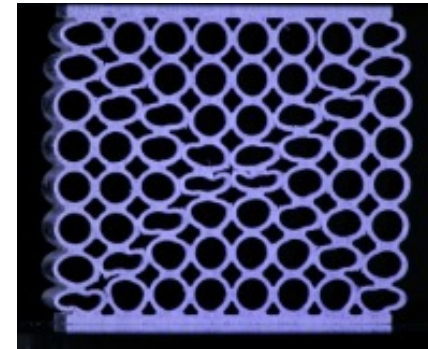
Théorie

Théorie de la bifurcation : 2 “verrous”

Points critiques multiples



Plusieurs échelles

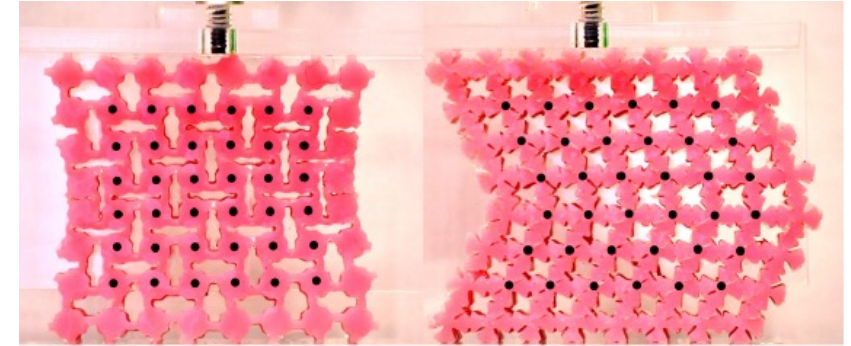


Théorie

Plusieurs échelles

Sur un problème fini possible de différentier

Sur un problème infini (périodicité): décomposer déplacement



$$u = \underline{\underline{E}} \cdot x + \tilde{u}$$

Théorie

Plusieurs échelles

$$u = \underline{\underline{E}} \cdot x + \tilde{u}$$

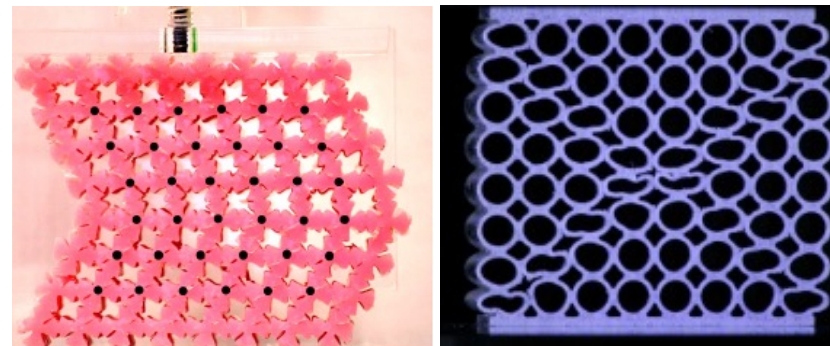
Stabilité mesoscopique

$$\varepsilon, \tilde{u} > 0$$



Stabilité macroscopique

$$\varepsilon, EE > 0$$



Théorie

Points critiques simples

En cas de bifurcation : comment changer de branche ?

Problématique :

Près d’un point d’équilibre (\mathbf{u}, f) on cherche un autre point d’équilibre (\mathbf{u}_2, f_2) :

$$\mathcal{E}_{,u}(\mathbf{u}_1, \lambda) = \mathcal{E}_{,u}(\mathbf{u} + \mathbf{u}_1, f + \lambda) - \mathcal{E}_{,u}(\mathbf{u}, f) = \mathcal{E}_{,uu}(\mathbf{u}, f)\mathbf{u}_1 + \mathcal{E}_{,uf}(\mathbf{u}, f)\lambda + o(\mathbf{u}_1, \lambda) = 0$$

Donc $\mathbf{u}_1 = \mathcal{E}_{,uu}^{-1}(\mathbf{u}, f)\mathcal{E}_{,uf}(\mathbf{u}, f)\lambda + o(\mathbf{u}_1, \lambda)$

Ok pour point ordinaire mais pour point de bifurcation $\mathcal{E}_{,uu}(\mathbf{u}, f)$ n’est pas inversible !



Utiliser le vecteur propre $\boldsymbol{\eta}_c$ associé à la valeur propre nulle

Théorie



Utiliser le vecteur propre η_c associé à la valeur propre nulle de $\mathcal{E}_{,nuu}$

Points critiques simples

$$\mathcal{E}_{,nuu} \Big|_{crit} = 0$$

Par définition : $\mathcal{E}_{,nuu} \Big|_{crit} \eta_c = \mathbf{0}$

$$\mathbf{u}_2 = A\eta_c, A \in \mathbb{R}$$

$\mathcal{E}_{,nuf} \Big|_{crit} = 0$
bifurcation

$\mathcal{E}_{,nuu} \Big|_{crit} = 0$

Bifurcation symétrique

$(\mathbf{u}_1, \lambda) \approx (A\eta_c, 0), A \in \mathbb{R}$

$$\eta_c^T \cdot \mathcal{E}_{,nu}(\mathbf{u}_1, \lambda) = \cancel{\eta_c^T \mathcal{E}_{,nuu} \mathbf{u}_1} + \cancel{\eta_c^T \mathcal{E}_{,nuf} \lambda} + \eta_c^T \mathcal{E}_{,nuuu} \frac{u_1^2}{2} + \eta_c^T \mathcal{E}_{,nuuf} \mathbf{u}_1 \lambda + \eta_c^T \mathcal{E}_{,nuff} \frac{\lambda^2}{2} + \dots$$

Bifurcation transcritique

$\mathcal{E}_{,nuu} \Big|_{crit} \neq 0$

$(\mathbf{u}_1, \lambda) \approx (A\eta_c + \mathbf{w}_p, 1), A \in \mathbb{R}$

Chemin principal

Théorie

Points critiques multiples

Plusieurs valeurs propres = 0 simultanément

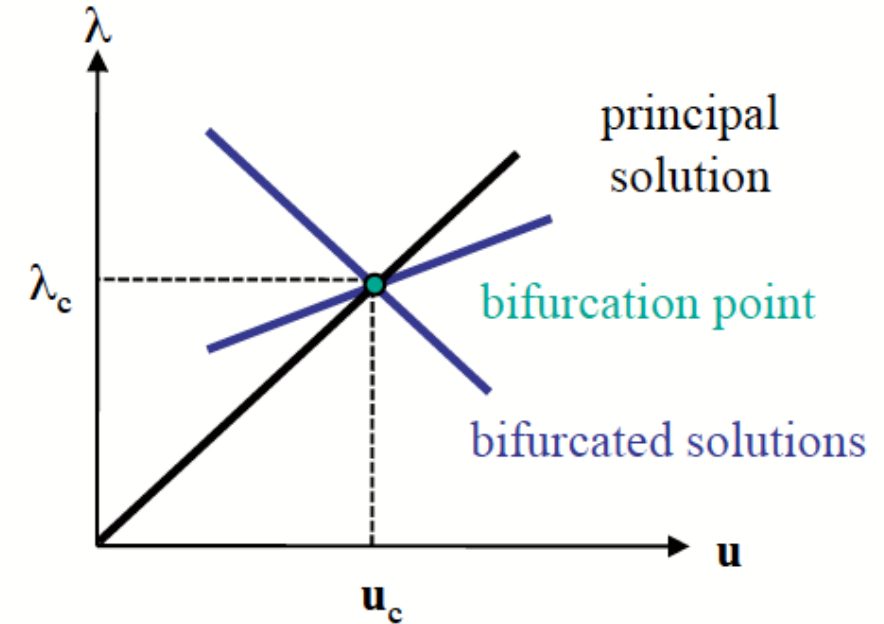
Apparaît en présence de symétrie dans le système

⇒ plusieurs chemins d'équilibre partent du point de bifurcation...

⇒ configurations déformées sur ces chemins sont différentes

Les configurations déformées, appelées « modes », sont prédites par les vecteurs propres critiques $\boldsymbol{\eta}_c$ correspondant aux valeurs propres nulles de \boldsymbol{J}

$$\boldsymbol{u}_1 = \sum_i \alpha_i \boldsymbol{\eta}_{ci}, \alpha_i \in \mathbb{R}$$



Théorie

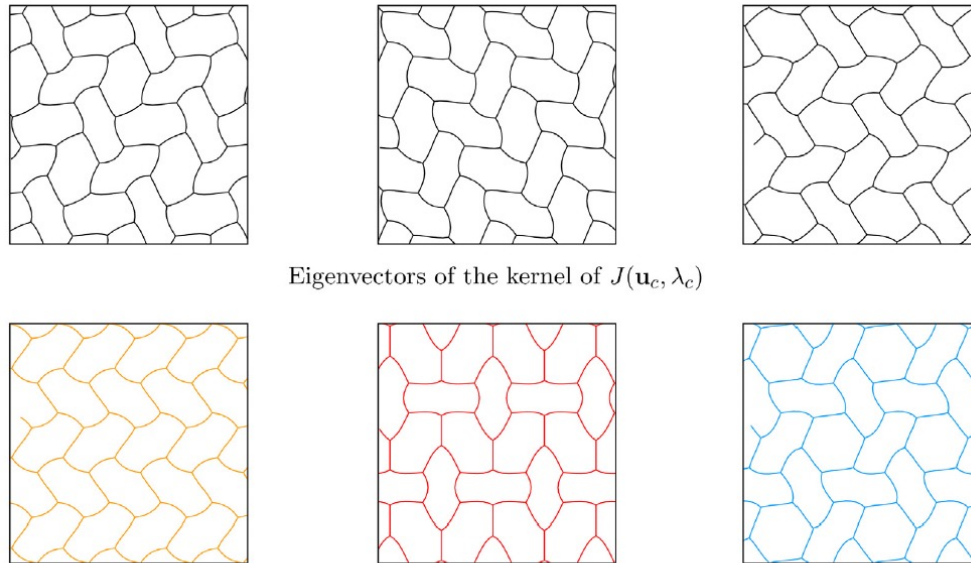
Cours 2

Points critiques multiples

Les configurations déformées, appelées « modes », sont prédites par les vecteurs propres critiques η_c correspondant aux valeurs propres nulles de J ... mais pas directement !

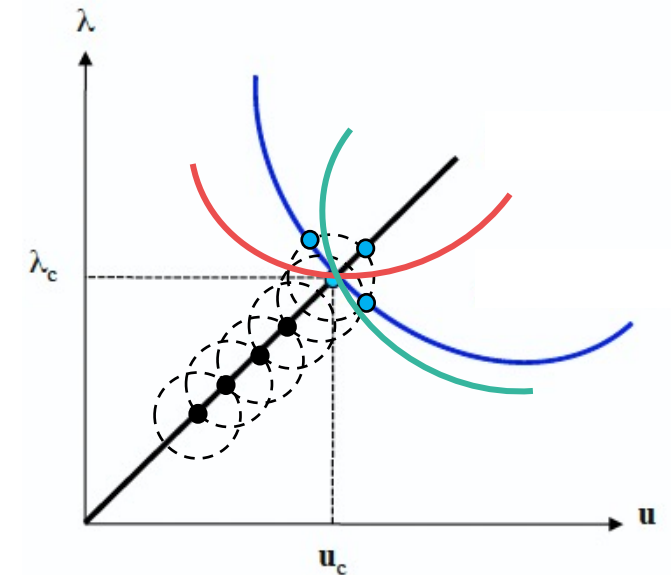
Théorie des groupes de symétries

$$\mathbf{u}_2 = \sum_i \alpha_i \boldsymbol{\eta}_{ci}, \alpha_i \in \mathbb{R}$$



Eigenvectors of the kernel of $J(\mathbf{u}_c, \lambda_c)$

Eigenvectors projected onto the symmetry-adapted basis

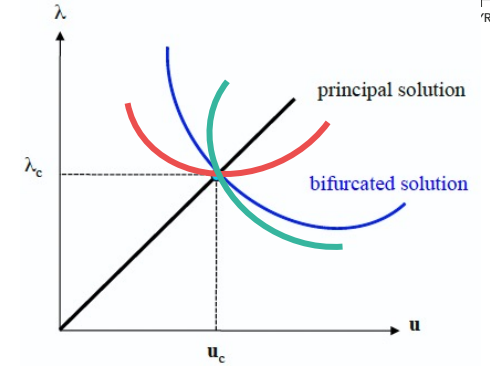


Théorie

Cours Commun

Points critiques multiples

Théorie des groupes de symétries



Un système avec un groupe de symétrie G a une énergie invariante sous l’action de ce groupe

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(T_g \mathbf{u}) &= \mathcal{E}(\mathbf{u}) \\ \Rightarrow \mathcal{E}_{,u}(T_g \mathbf{u}) &= T_g \mathcal{E}_{,u}(\mathbf{u})\end{aligned}$$

$$T_{mx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

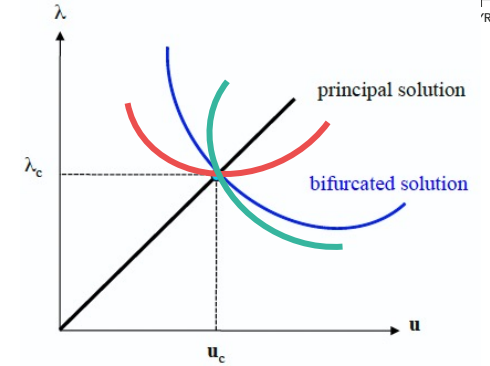
$$T_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Théorie

Cours 2

Points critiques multiples

Théorie des groupes de symétries



Développement asymptotique des équations d’équilibre

$$\mathcal{E}_{,u}(u_1) = 0 \text{ et } \mathbf{u}_1 = \sum_i \alpha_i \boldsymbol{\eta}_{ci}, \alpha_i \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \alpha_k \varepsilon_{ijk} + \Delta\lambda \sum_{j=1}^m \alpha_j \varepsilon_{ij\lambda} + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \alpha_j \alpha_k \alpha_l \varepsilon_{ijkl} = 0$$

Théorie

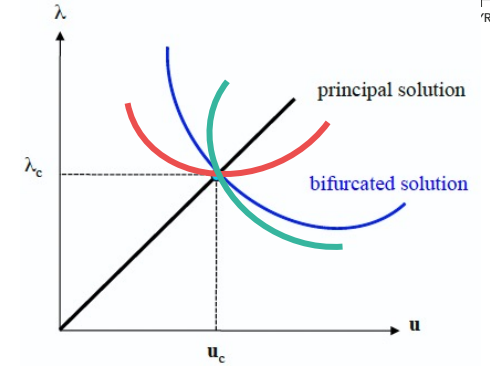
Cours Commun

Points critiques multiples

Théorie des groupes de symétries : prédit la forme des tenseurs $\varepsilon_{uu\lambda}$; ε_{uuu} et ε_{uuuu}

Exemple simple : on peut prédire la forme du vecteur $u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ invariant sous l’effet d’un miroir d’axe x

$$\mathbf{T}_{mx} \mathbf{u} = \mathbf{u} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



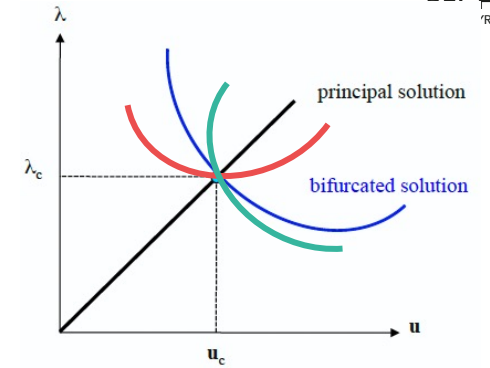
Bifurcations et symétries

Résultats

Résultats

Cours 2

Points critiques multiples



Théorie des groupes de symétries : prédit la forme des tenseurs $\mathcal{E}_{ij\lambda}$; \mathcal{E}_{ijk} et \mathcal{E}_{ijkl}

Pour un nid d'abeilles : $\mathcal{E}_{,ij\lambda} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

$$\mathcal{E}_{,ijkl} = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 & Y & 0 & 0 & 0 & Y \\ 0 & Z & 0 & Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z & 0 & 0 & 0 & Z & 0 & 0 \\ 0 & Z & 0 & Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z & 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & Z & 0 & 0 & 0 & Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z & 0 & Z & 0 \\ Y & 0 & 0 & 0 & Y & 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}_{ijkl}\alpha_j\alpha_k\alpha_l + 3\lambda_2\mathcal{E}_{ij\lambda}\alpha_j = 0$$

Résultats

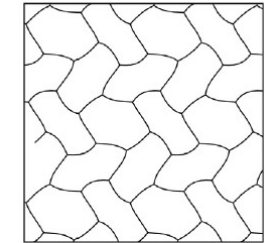
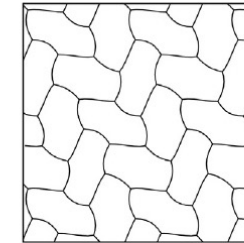
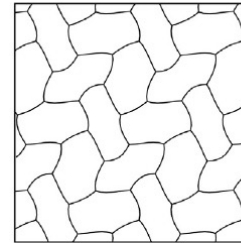
Points critiques multiples

Théorie des groupes de symétries : prédit la forme des tenseurs $\epsilon_{uu\lambda}$; ϵ_{uuu} et ϵ_{uuuu}

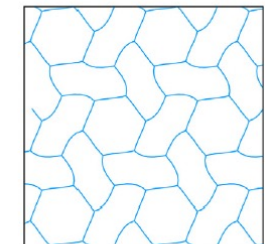
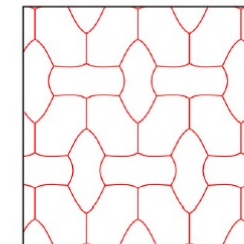
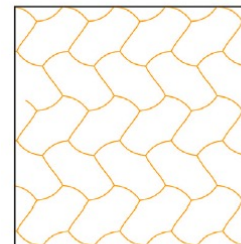
Pour un nid d’abeilles :

$$\mathbf{u}_2 = \begin{cases} \boldsymbol{\eta}_{ci} & \forall i = 1,2,3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (\boldsymbol{\eta}_{ci} \pm \boldsymbol{\eta}_{cj}) & \forall i \neq j \\ \frac{\sqrt{3}}{3} (\boldsymbol{\eta}_{c1} \pm \boldsymbol{\eta}_{c2} \pm \boldsymbol{\eta}_{c3}) \end{cases}$$

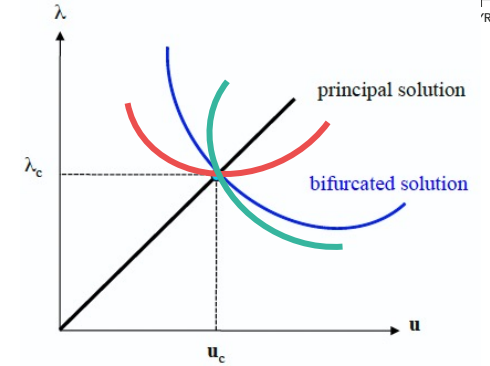
3 modes



Eigenvectors of the kernel of $J(\mathbf{u}_c, \lambda_c)$



Eigenvectors projected onto the symmetry-adapted basis



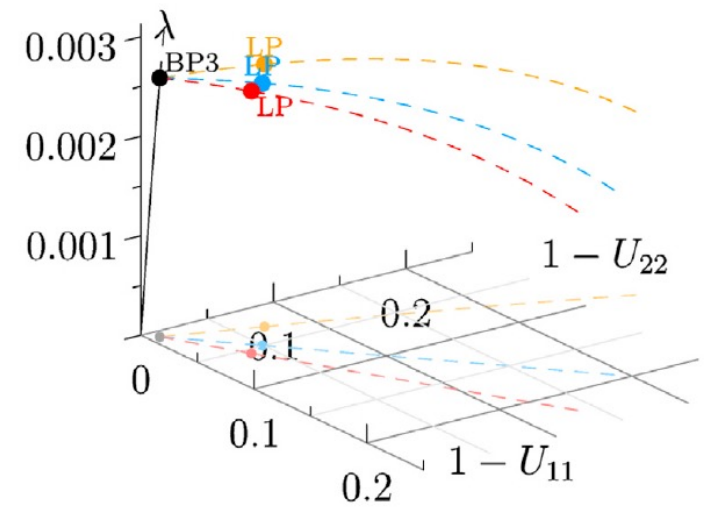
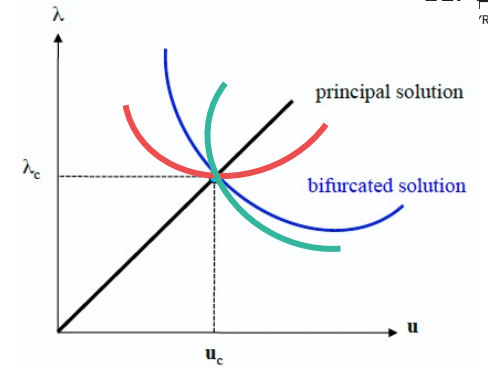
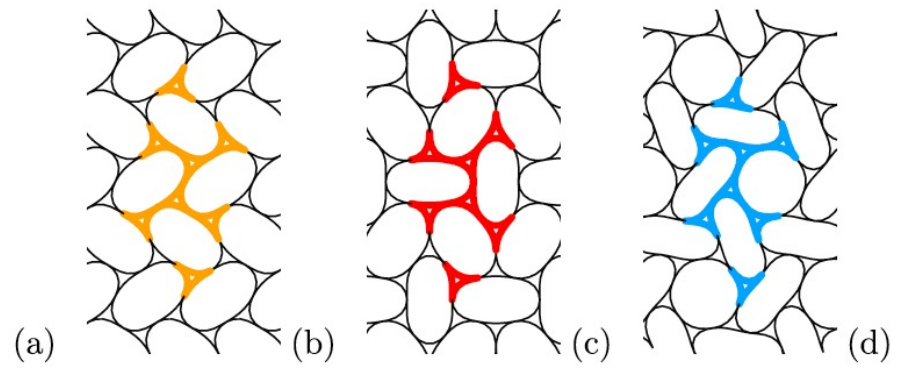
Résultats

Points critiques multiples

Théorie des groupes de symétries : prédit la forme des tenseurs $\epsilon_{nuu\lambda}$; ϵ_{nuuu} et ϵ_{nuuuu}

Pour un nid d’abeilles :

$$\mathbf{u}_2 = \begin{cases} \eta_{ci} & \forall i = 1,2,3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (\eta_{ci} \pm \eta_{cj}) & \forall i \neq j \\ \frac{\sqrt{3}}{3} (\eta_{c1} \pm \eta_{c2} \pm \eta_{c3}) \end{cases}$$



Bifurcations et symétries

Conclusions

Conclusions :

Théorie des bifurcations complexe en présence de symétries

Tirer parti des symétries pour trouver les branches bifurquées

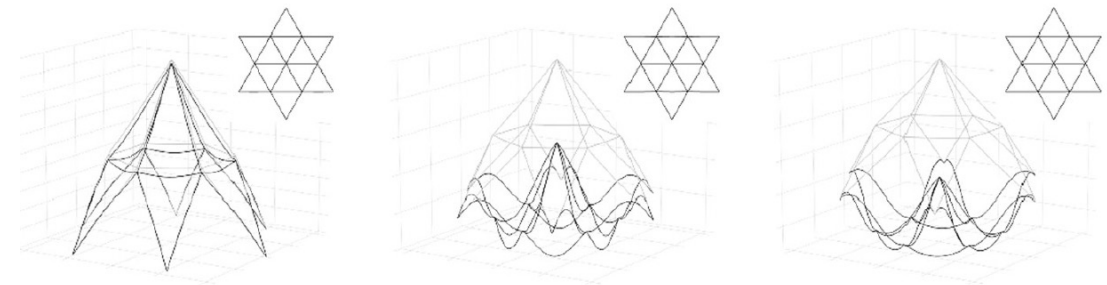
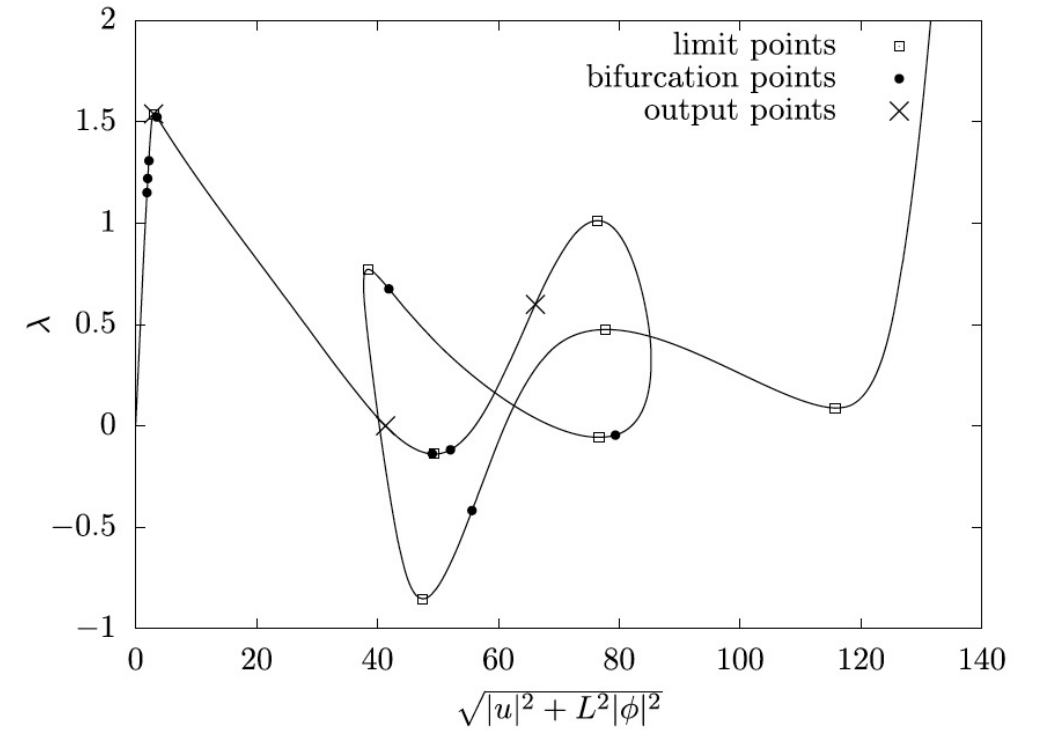
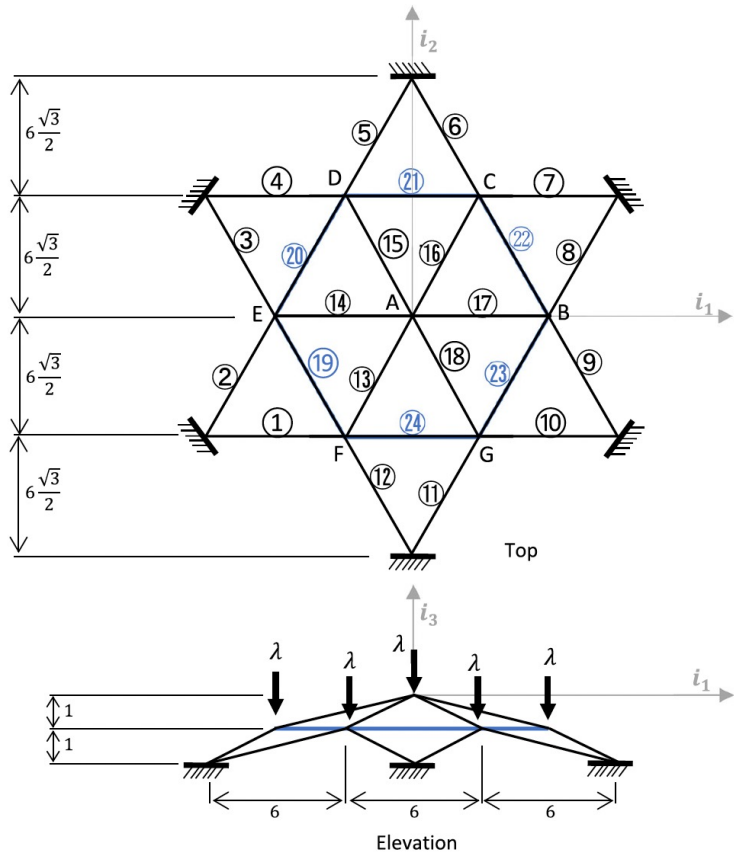
On retrouve/explique/prédit les résultats expérimentaux !

Généralisation à d’autres structures

Flambage de dômes symétriques

Généralisation à d’autres structures

Flambage de dômes symétriques



Généralisation à d’autres structures

Flambage de dômes symétriques

